Jméno: Skupina:

Vypočítejte limity:

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2} = +\infty \qquad \left(\text{„}\dfrac{1}{0^+}\text{"}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 1} \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\right)$

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{4x^3 - x}{x^2 - x^3} = -4 \quad \left(\dfrac{\infty}{\infty} \sim \dfrac{4x^3}{-x^3}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 1\pm} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{y\to \pm\infty} e^{y} = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases} \quad \left(\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{x-1} = \pm\infty \quad \left(\dfrac{1}{0\pm}\right)\right)$

5) $\lim\limits_{x\to -3+} \ln(x+3) = \lim\limits_{y\to 0+} \ln y = -\infty$

6) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{4x^3 - x^2}{x^2+1} = \pm\infty \quad \left(\dfrac{\infty}{\infty} \sim \dfrac{x^3}{x^2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0 \quad \left(\text{„}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\text{"}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x-1}}_{\to -1} = -1$

Určete obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte:

1) $\left(e^{2x^2}\right)' = e^{2x^2} \cdot 4x = 4x e^{2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\left[\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]' = \dfrac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{2}{x^2-1}, \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3) $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right), \quad x \in (0,+\infty)$

4) $\left(x \cdot \sin^2 x\right)' = \sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x + x \cdot \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$

5) $\left(\cos\sqrt{x-1}\right)' = -\sin\sqrt{x-1} \cdot \left(\sqrt{x-1}\right)' = -\dfrac{\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}, \quad x \in (1,+\infty)$

V příkladu 5) vypočítejte i derivaci v bodě 1 zprava.

$$\left(\cos\sqrt{x-1}\right)'_{x=1+} = \lim_{x\to 1+}\left(\cos\sqrt{x-1}\right)' = \lim_{x\to 1+}\left(-\frac{\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

($\cos\sqrt{x-1}$ je v bodě $1+$ spojitá, ex. limita derivace v $1+$)