Opravný zápočtový test – Matematika II.

1. Určete definiční obor funkce, definiční obor derivace dané funkce a derivaci vypočtěte:

(2) a) $\left(e^{-x}\cdot \sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x),\ x \in R$

(2) b) $\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)' = (x^2-1)^{-1\,\prime} = -(x^2-1)^{-2}\cdot 2x = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2},\ x \neq \pm 1$

(3) c) $\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot \dfrac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} = -\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\cdot\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$D_f = \{x;\ \frac{x+1}{x-2} \geq 0\} = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty)),\quad D_{f'} = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

(3) d) $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$D_f = R$

(3) e) $\left(x^2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x-1}\right)\right)' = 2x \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \dfrac{x^2}{\cancel{1}+(x-\cancel{1})}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} =$

$D_f = \langle 1,+\infty),\ D_{f'} = (1,+\infty)$

$= 2x \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}$

(3) f) $\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)' = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + x\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

$D_f:\ 1+\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ $= \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right)$

(3) g) $\left(\sin^3\left(\ln\left(\sqrt{x}-2\right)\right)\right)' =$

$= 3\sin^2\left(\ln(\sqrt{x}-2)\right)\cdot\cos\left(\ln(\sqrt{x}-2)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$D_f = \{x;\ x \geq 0 \text{ a } \sqrt{x}-2 > 0\} = (4,+\infty)$

2. <u>Vypočtěte následující limity (lze užít l'Hospitalovo pravidlo):</u>

(2) a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+3x^2)}{\ln(1+2x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+3x^2}(1+6x)}{\frac{1}{1+2x^2}\cdot 4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+6x)(1+2x^2)}{(x+3x^2)\cdot 4x} = 1.$$

$\frac{\infty}{\infty}$

(2) b) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{y\to 1} e^{y} = \underline{\underline{e}}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(2) c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$

(2) d) $$\lim_{x\to 0+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \underset{\to 0}{x}\cdot \underset{\to 0}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

3. <u>Je dána funkce $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$.</u>

(2) a) Najděte její definiční obor, limity v krajních bodech intervalů z D_f.

(2) b) Vypočtěte první derivaci funkce f a určete, kde je funkce rostoucí, resp. klesající, vypočtěte lokální i globální extrémy.

(2) c) Vypočtěte druhou derivaci funkce f a určete, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, pokud existují, určete inflexní body.

(2) d) Načrtněte graf funkce f.