

MA1 - příklady (s vysvětlením) k přednášce 20.11.2019

1. Úvod do integrálního počtu

(na konci "minulé přednášky 18.11.2019)

Příklady učitel (a potřebnosti) antidiferenciálu:

1) Z dráhy Newtonova pohybového zákona  $m\vec{a} = \vec{F}$   
( $m$  - hmotnost,  $\vec{a}$  zrychlení,  $\vec{F}$  síla, působící "pohyb"  
hmotného bodu) zkusme najít dráhu  $s = s(t)$   
( $t$  - čas), je-li síla  $\vec{F}$  konstantní. Pak lze psát

$$m \cdot a = F$$

a vidíme, že  $a(t) = v'(t)$  a  $v(t) = s'(t)$ , tedy,

$$s''(t) = \frac{F}{m}, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle:$$

potom (zřejmě)  $v(t) = s'(t) = \frac{F}{m}t + c$  a

(ověřte!)  $s(t) = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + ct + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$

A konstanty  $c, d$  lze určit z t.zv. počátečních podmínek:

$s(0) = s_0, \quad v(0) = v_0,$  pak  $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{F}{m} \frac{t^2}{2}, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle$

2) Hnutí hmotného bodu, "zaněšeného" ve pružině  
(nezaněšené odpor vzduchu) - bod se pohybuje ve přímce  
a působící síla je  $F = -kx$ ,  $k > 0$  konstanta  
a  $x$  je výchylka a rovnovážné polohy ( $x = x(t)$ ).

Polom 2. Newtonov zákon má tvar

$$m x''(t) = -k x(t), \text{ označme } \frac{k}{m} = \alpha^2 (\alpha > 0)$$

pak  $x''(t) = -\alpha^2 x(t)$

(a prozkoumáme "tabulky derivací" najdeme, spolu s "odvozením pro derivaci složene funkce), ať řešení

jsou:  $x_1(t) = \sin(\alpha t)$ ,  $x_2(t) = \cos(\alpha t)$ , a pak

take  $x(t) = c_1 \sin(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t)$ .

Zadáme-li opět počáteční rychlost a rychlost, tj.  $x(0) = x_0$  a  $x'(0) = v_0$ , dostaneme:

$$\underline{x(t) = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t + x_0 \cos \alpha t, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle}$$

$$(x(0) = c_2 = x_0, \quad x'(0) = c_1 \alpha = v_0)$$

(a malá úprava dá

$$x(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2} \left( \cos \varphi \sin(\alpha t) + \sin \varphi \cdot \cos(\alpha t) \right)$$

tj.  $x(t) = A (\sin(\alpha t + \varphi))$  (analogicky),

kde  $\frac{1}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2}} \left( \frac{v_0}{\alpha}, x_0 \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$

a  $A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2}$

3. Radioaktivní rozpad látky

( $m(t)$  - množství látky v čase  $t$ ,  $m_0 = m(0)$ .)

je dala rovnice

$$m'(t) = -k m(t), \quad k > 0$$

Najdeme řešení? (bude dala návod při probírání  
řešení diferenciálních rovnic)

Zde asi umíme (opět) ukázat - rovnice má  
řešení  $m(t) \equiv 0$ ,  $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ , ale nemůžeme také

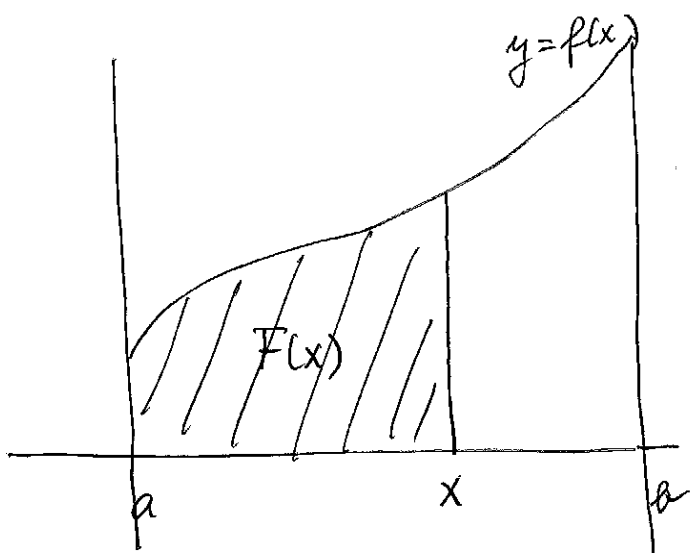
$$m(t) = e^{-kt}, \quad \text{ale také i řešení je}$$

$$\underline{m(t) = c e^{-kt}}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{zkuste ověřit -}$$

$$(c e^{-kt})' = -k c e^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{f. } m'(t) = -k m(t) \quad \forall)$$

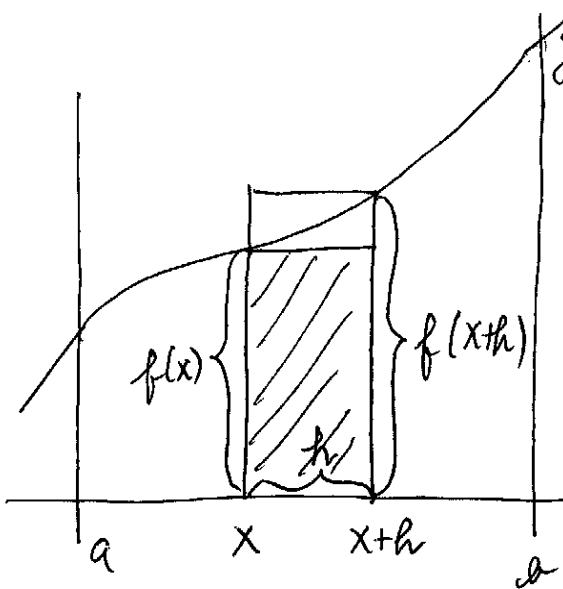
4. Mějme kladnou rostoucí, spojitou funkci  $f(x) = y$   
v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .



Obvodíme  $F(x)$  velikost  
plochy, ohraničené osou  $x$   
a grafem funkce  $f$ , se  
„základnou“  $\langle a, x \rangle$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$   
a ukážeme si, že platí:

$$\underline{F'(x) = f(x) \quad \text{v } \langle a, b \rangle \quad \forall}$$

Je  $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  - při výpočtu limity pomocí „šňáručci“: (plochy obdelnicí)



$$f(x) \cdot h \leq F(x+h) - F(x) \leq f(x+h) \cdot h$$

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

( $f$  je spojitá v bodě  $x$ ),

tedy, větou o šňáručcích dostaneme, že

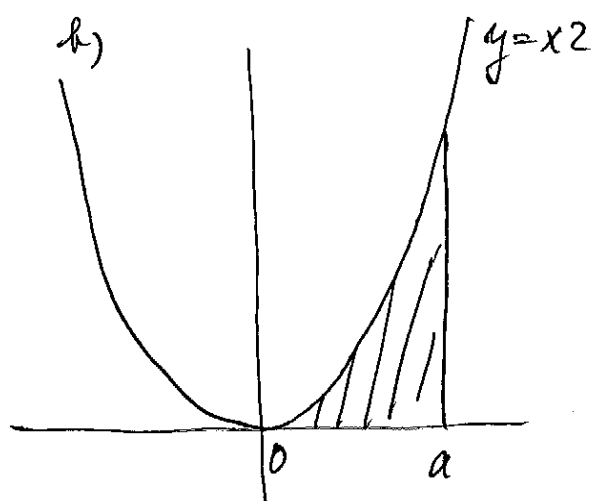
$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

(což jsme měli ukázat).

Tedy, pomocí „antiderivace“ funkce  $f$  lze určit i velikosti ploch pod grafem  $f$  (bude v teorii a aplikacích určitého integrálu)

Příklad a) :- v příkladu „nakřiv“ - plocha  $P(f; \langle \alpha, \beta \rangle)$  mezi osou  $x$  a grafem  $f$  nad intervalem  $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$  je určena

$$P(f; \langle \alpha, \beta \rangle) = F(\beta) - F(\alpha)$$



$$f(x) = x^2,$$

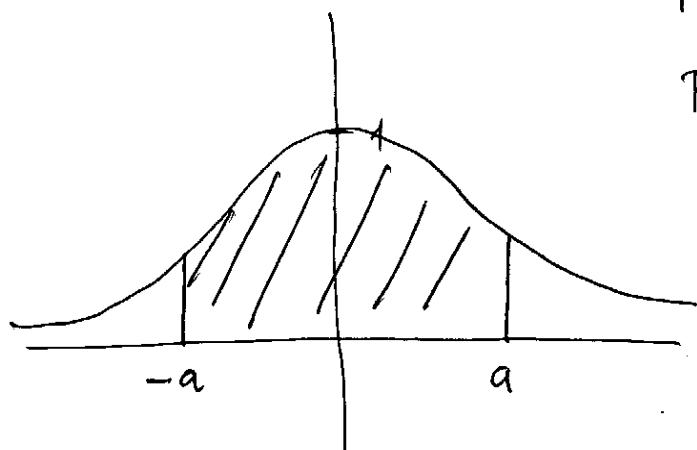
$$P(x^2; \langle 0, a \rangle) = \frac{a^3}{3}$$

(metod<sup>u</sup>  $F(x)$  k<sup>o</sup> fci  $f(x)$  je'  $'$ )

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad (\text{zkuska: } \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2)$$

(metod<sup>u</sup> Archimedes)

nebo



$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle -a, a \rangle\right) = 2P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle 0, a \rangle\right)$$

$$= 2 \cdot \arctan(a)$$

$$\left( F(x) = \arctan x; (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

např.  $a=1$        $P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle 0, 1 \rangle\right) = \frac{\pi}{4}$

2. Primitivní funkce k funkci  $f$  (neurčitý integrál)

Definice: Necht' funkce  $f$  je definována na intervalu  $(a,b)$ ,  
pak funkce  $F$ , pro kterou platí

$$\underline{F'(x) = f(x), x \in (a,b)}$$

se nazývá primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $(a,b)$ .

Příklady - opácně člena! tabulka derivací:

$f(x)$	$F(x), x \in (a,b)$
0	$c, x \in \mathbb{R}$
1	$x, x \in \mathbb{R}$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1, x > 0$ (obecně) ( $\alpha \in \mathbb{N}; x \in \mathbb{R}$ )
$\frac{1}{x}$	$\ln x, x \in (0, +\infty)$
$e^x$	$e^x, x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x, x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{tg} x, x \in \left( (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x, x \in (-1, 1)$

### Poznámka

pro funkci  $f(x)=0$  - máme nekonečně mnoho primitivních funkcí:  
 $F(x)=c, c \in \mathbb{R}$

jak je to pro „ostatní“ funkce?

V1: Je-li  $F'(x)=f(x)$  v  $(a,b)$ , pak také  $(F(x)+c)'=f(x)$   
v  $(a,b)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Tedy, máme také už nekonečně mnoho primitivních funkcí k funkci  $f$ . A máme dokonce vědmy, neboť platí:

V2. Je-li  $F'(x)=G'(x)=f(x)$  v  $(a,b)$ , pak existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  tak, ať  $G(x) = F(x) + c, x \in (a,b)$ ,

A každé označení (buď množiny všech primitivních funkcí k funkci  $f$  v  $(a,b)$  nebo libovolné fce a množiny funkcí primitivních - výsledky jsou „stejně“)

$$\int f(x) dx = F(x) + c, x \in (a,b), c \in \mathbb{R}$$

a máme - neurčitý integrál funkce  $f$  v  $(a,b)$   
(nebo na  $(a,b)$ )

Dabit' d'lešita' insieme' o primitivnu' funkce'ch :

V3: Je-li  $F(x)$  primitivní funkce k  $f(x)$  na  $(a,b)$ ,  
pak je  $F(x)$  spojita' funkce v  $(a,b)$ .

(Dk:  $F'(x)=f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow F$  je spojita' v  $(a,b)$ )

V4: Existence primitivní funkce (bez důkazu)

(základní věta matematické analýzy)

Je-li funkce  $f$  spojita' v  $(a,b)$ , pak k funkci  $f$   
v  $(a,b)$  existuje funkce primitivní.

Dabit' příklady:

1.  $\frac{1}{x} = f(x)$  je spojita' i na intervalu  $(-\infty, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$  i zde má' primitivní funkce -

- pokud:  $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad \nabla$   
 $(-x \in (0, +\infty))$

Tedy, hlavně je třeba upravit (d'lešit'!)

$\nabla$   $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ,  $x \in (0, +\infty)$  nebo  
 $x \in (-\infty, 0)$



2.  $f(x) = |x|$  - spojita' funkce v  $\mathbb{R}$ , tedy ma' primitivni' funkci, ale "nemi" v tabulce", ale dostaneme se tam" v  $(-\infty, 0)$  i v  $(0, +\infty)$

$$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in (0, +\infty), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -x \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + d, \quad x \in (-\infty, 0), \quad d \in \mathbb{R}$$

a  $F(0)$ ? -  $F(x)$  "musi" byt v bode  $x=0$  spojita', tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x), \text{ tj. } c = d,$$

pak dodefinujeme "spojite"  $F(0) = c$

$$\text{tj. } F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & , x \in (0, +\infty) \\ c & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

(d.r. slepordku' "primitivni' funkce")

3. A jak u nepojite' funkce?

$$\text{Pr: } f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} F(x) &= x + c \\ F(x) &= c \\ F(x) &= -x + c \end{aligned}$$

(opet' spojite' "stepeni") -

- ale  $F(x)$  nema' derivaci v bode  $x=0$ ! tj.  $\text{sgn } x$  nema' v  $\mathbb{R}$  primitivni' funkci ( $F'_-(0) = -1, F'_+(0) = 1$ )

4. Ale jsou i nepojité funkce, které mají funkci primitivní!

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0, f(0) = 0 \text{ není}$$

funkce spojitá v bodě  $x=0$  (nemá pro  $x \rightarrow 0$  limitu),  
ale pro funkci, definovanou

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0; F(0) = 0 \text{ platí:}$$

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0, F'(0) = 0, \text{ tj.}$$

$F(x)$  je primitivní k funkci  $f(x)$  v  $\mathbb{R}$ !

5. Jak "spočítat" primitivní funkce k funkcím (například)

$$f(x) = 4 \cos x \quad ? \quad F(x) = 4 \sin x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x^2} \quad ? \quad F(x) = e^x - \frac{1}{x}, x \neq 0$$

a třeba k  $f(x) = e^{3x}$ , nebo  $f(x) = \sin(2-x)$ ,  
nebo k  $f(x) = \frac{1}{2x+3}$  (apod.)

$$? \quad \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + C, \quad \int \sin(2-x) dx = -\cos(2-x)(-1) + C,$$

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C, \text{ pokud } 2x+3 > 0$$

$$\nabla \text{ a lze } \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C \text{ (pro } x \neq -\frac{3}{2})$$

1) Obecně (užitečný "návod", který usnadňuje počítání neurčitých integrálů):

jestliže  $F'(x) = f(x)$  v intervalu  $(\alpha, \beta)$ ,

$$\text{pak } \left( \frac{F(ax+b)}{a} \right)' = \frac{F'(ax+b)}{a} \cdot a = f(ax+b) \quad \forall$$

$$(a \neq 0, ax+b \in (\alpha, \beta))$$

tedy, máme návod:

$$\forall \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c,$$

$$\text{pokud } \int f(x) dx = F(x) + c \quad (\text{v odpovídajících intervalech})$$

a další příklady:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a=-1, b=0)$$

$$\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln|2-x| + c, \quad x \neq 2 \quad (a=-1, b=2)$$

$$\int \frac{1}{4x^2+1} dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1} dx = \frac{1}{2} \arctg(2x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{4} \frac{\arctg\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \arctg(x+2) + c$$

2) A dabit' pravidla (ažijne "obecně" vzorec pro počítání derivací)  
Pravidla výpočtu primitivních funkcí (neuročíteždi integrálů)

kechť  $F'(x) = f(x)$  a  $G'(x) = g(x)$  v  $(a, b)$ , pak platí:

1)  $\int f'(x) dx = f(x) + c$ ,  $x \in (a, b)$ ;

2)  $F(x) + G(x)$  je primitivní fce k fci  $f(x) + g(x)$  v  $(a, b)$ ,

h.  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ ;

3)  $cF(x)$  je primitivní fce k  $cf(x)$  v  $(a, b)$ ,

h.  $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

Příkladový:

$$\int 4\sqrt{x} dx = 4 \int \sqrt{x} dx = 4 \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + c, x \in (0, +\infty)$$

$$\int \frac{1+x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x\right) dx = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + c, x \in (0, +\infty) \vee x \in (-\infty, 0)$$

a 4) Využití vzorce pro derivaci součinu?

anotme:  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$  v  $(a, b)$ , žije-li  
 $f, g'$  spojité v  $(a, b)$ , pak

existují v  $(a, b)$   $\int (f(x)g(x))' dx = f(x) \cdot g(x) + c$ , a zároveň také!

$$\int (f(x)g(x))' = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

a odtud máme důležitý návod - integrace per partes:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \quad x \in (a,b)$$

Jak bychom měli rozumět? - Integrace per partes (pro částech) využíváme při integraci součinu dvou funkcí, a nicméně aspoň jednu z nich "integrát" - ne volíme ji to funkci  $f'$ , druhou pak derivujeme a místo původního integrálu  $\int f(x)g(x)dx$  "dostaneme" "ještě" -  $\int f(x)g'(x)dx$  - pokud ji "lehčí", tak nebo to "použijeme".

Příklad: 1)  $x \cdot \ln x$  je spojitá funkce v  $(0, +\infty)$ , tedy existuje

$$\int x \cdot \ln x dx \stackrel{*}{=} \text{(integrace per partes)}$$

$\ln x$  nemáme integrát (zatím), tak zvolíme

$$f'(x) = x, \text{ pak } f(x) = \frac{x^2}{2}, \text{ a } g(x) = \ln x, \text{ a } g'(x) = \frac{1}{x}, \text{ tedy}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C, \quad x \in (0, +\infty)$$

Budeme zapísat (dále-li)

$$\int x \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} f' = x, \quad f = \frac{x^2}{2} \\ g = \ln x, \quad g' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \dots$$

(atd)

$$2) \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} f' = x, f = \frac{x^2}{2} \\ g = e^x, g' = e^x \end{array} \right| \stackrel{\text{tt}}{=} \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx -$$

maťme dve

možné volby - (1) jako v prvom príklode

- asi není "dobrá" volba, integrál  $\int \frac{x^2}{2} e^x dx$  je asi "horší"  
než ten, čo maťme určiť - tedy obrátene:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} f' = e^x, f = e^x \\ g = x, g' = 1 \end{array} \right| \stackrel{\text{tt}}{=} x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$
$$= \underline{x e^x - e^x + C}, x \in \mathbb{R} \quad \nabla$$

$$3) \int_{x \in (0, +\infty)} \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx \stackrel{\text{tt}}{=} \left| \begin{array}{l} f' = 1, f = x \\ g = \ln x, g' = \frac{1}{x} \end{array} \right|$$

(ale integrál i funkci "samotnou")

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx = \underline{x \ln x - x + C}$$

4)  $\int_{x \in \mathbb{R}} e^x \cos x dx$  - asi také příklad ne integraci  
per partes, ale derivací omi integrací  
se nepodaří integrál "zjednodušit"  
jako v předchozích příklodech -  
- dostaneme ale integrál per partes  
"rovnici" pro hledaný integrál

$$\begin{aligned} I &= \int_{x \in \mathbb{R}} e^x \cos x dx = \int \left| \begin{array}{l} f' = e^x \quad f = e^x \\ g = \cos x, \quad g' = -\sin x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x - \int (-\sin x) \cdot e^x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \\ &= \int \left| \begin{array}{l} f' = e^x \quad f = e^x \\ g = \sin x, \quad g' = \cos x \end{array} \right| = e^x \cdot \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx, \end{aligned}$$

tedy máme:  $I = e^x (\cos x + \sin x) - I$ , a odhad

$$2I = e^x (\cos x + \sin x) \text{ a}$$

$$\underline{I = \frac{e^x}{2} \cdot (\cos x + \sin x) + c, \quad x \in \mathbb{R}}$$

Poznámka: Pozor! Musíme zachovat v druhém  
"použití" per partes volbu  $f'$  a  $g$  jako  
v prvním použití per partes!

Kdebychom volbu změnil:

$$\int e^x \cos x dx = \int \left| \begin{array}{l} f' = e^x, \quad f = e^x \\ g = \cos x, \quad g' = -\sin x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int \left| \begin{array}{l} f' = \sin x, \quad f = -\cos x \\ g = e^x, \quad g' = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x - e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \\ &= \int e^x \cos x dx \quad \left( \text{tj. pravda,} \right. \\ & \quad \left. \text{ale integrál nesměná!} \right) \end{aligned}$$