CVIČENÍ - Limity - vlastní limity ve vlastním bodě

I Užití definice limity

Def. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Problémy a příklady

1. Z definice limity ukažte, že platí:

$$\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4 .$$

Řešení: Musíme ukázat, že zvolíme-li libovolné okolí $\mathcal{U}(4, \varepsilon)$, pak lze nalézt takové prstencové okolí bodu 2 $\mathcal{P}(2, \delta)$, že platí:

$$x \in \mathcal{P}(2, \delta) \Rightarrow 3x - 2 \in \mathcal{U}(4, \varepsilon),$$

tj. k lib. $\varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta > 0$, že platí:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(3x - 2) - 4| < \varepsilon \quad \ldots (*)$$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ (libovolné), jak takové δ nalézt?
Pokusíme se nalézt odhad vzdálenosti $|x - 2|$ z nerovnosti v implikaci $(*)$, která musí splňovat funkční hodnoty:

má-li platit $|(3x-2)-4| < \varepsilon$, pak také

$$|3x-6| < \varepsilon$$
$$|3(x-2)| < \varepsilon$$
$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

a tedy

obráceně: zvolíme-li $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, pak, když

$$|x-2| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

pak také

$$3|x-2| < \varepsilon$$

a

$$\underline{|(3x-2)-4| < \varepsilon},$$

což jsme měli ukázat.

Tedy, k libovolnému $\varepsilon>0$ lze najít $\delta\ (\leq \frac{\varepsilon}{3})$ tak, že platí (*) a důkaz je tedy hotov.

Podobně se řeší i další příklady – již stručněji.

Užitím definice ukažte, že

$$\lim_{x\to x_0} (ax+b) = ax_0+b$$

Řešení. Zvolme lib. $\varepsilon>0$, máme ukázat, že lze nalézt $\delta>0$ tak, že když $0<|x-x_0|<\delta$, pak $|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$.

Kdy je $|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon$?

Upravme: $|a|\,|x-x_0|<\varepsilon$ (*)

(i) když $a=0$, pak (*) platí pro vš. $x\in R$, (δ-lib.)

(ii) když $a\neq 0$, pak (*) platí pro $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|}$,

tedy, zvolíme-li $\delta \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$, pak:

$$|x-x_0| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow |(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon,$$

což jsme měli ukázat.

3. Užitím definice ukažte, že $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

Řešení: Opět musíme ukázat, že zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, můžeme najít $\delta > 0$ tak, že platí:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$$

Má-li být $|x^2| < \varepsilon$, tj. $|x|^2 < \varepsilon$, pak stačí mít $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, tj. $\underline{\delta \text{ volit: } \delta \leq \sqrt{\varepsilon}}$

4. Užitím definice ukažte, že $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$

Řešení: opět k lib. $\varepsilon > 0$ máme najít $\delta > 0$ tak, aby platilo:
$0 < x < \delta \Rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon$, což je ekvivalentní s $0 < x < \delta \Rightarrow x < \varepsilon^2$;
Tedy, k $\varepsilon > 0$ lze volit $\delta \leq \varepsilon^2$.

5. Užitím definice limity ukažte, že

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4. \qquad \text{(obtížnější!)}$$

Řešení: Opět máme k lib. $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ tak, že platí implikace:
$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon \quad \dots \quad (*)$$

Pokusme se tak, jako v předchozích příkladech ke zvolenému (libovolnému) $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ tak, že z nerovnosti $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se budeme snažit získat odhad pro $|x-2|$:

$|x^2-4| < \varepsilon$

$|x-2||x+2| < \varepsilon$ a tedy (lze předpokládat, že $|x+2| \neq 0$)

$|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$;

zde ale odhad pro $|x-2|$ závisí nejen na $\varepsilon>0$, ale také na x – tedy tedy $\delta>0$ nemůžeme + zde ji volit nezávisle „vhodně"!

Pokusme se „odhadnout": nejprve nějaké $\delta>0$:

je-li $0<|x-2|<\delta$, pak

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| < \delta|x+2| ,$$

je možné nějak „zařídit", aby $\delta|x+2| < \varepsilon$?

Je třeba omezit výraz $|x+2|$:

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2|+4 < \delta+4$$

Podle definice limity má existovat „nějaké $\delta>0$" tak, aby platila implikace (*), stačí se tedy omezit napříkad na $\delta<1$; pak bude

$$|x+2| < \delta+4 < 5,$$

a tedy $|x^2-4| = |x-2||x+2| < 5\cdot\delta$;

stačí pak vezmeme ještě $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$, bude

$$|x^2-4| < 5\cdot\delta \leq 5\cdot\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon ;$$

Tedy závěr:

zvolíme-li lib. $\varepsilon>0$, pak, je-li $\delta \leq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$, platí:

$$(0<)|x-2|<\delta \Rightarrow |x^2-4| < \delta|x+2| < 5\delta \leq 5\cdot\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

což jsme měli dokázat.

6. Ukažte z definice, že
$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2.$$

(Podobný příklad k příkladu 5, také ne jednoduchý)

<u>Řešení</u>: opět můžeme k $\varepsilon > 0$ lib. zvolenému najít $\delta > 0$ tak, že platí:
$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$$

1) $\sqrt{x}$ je def. pro $x \geq 0$, δ tedy zvolíme tak, aby $0 < 4-\delta < x < 4+\delta$, tj. $\underline{\delta < 4}$

2) jak z nerovnosti $|x-4| < \delta$ získat odhad pro $|\sqrt{x}-2|$?

je-li $|x-4| = |\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2| < \delta$, pak
$$|\sqrt{x}-2| < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|}$$

ale $\sqrt{x}+2 \geq 1$, tj. $\frac{\delta}{\sqrt{x}+2} \leq \delta$;

Zvolíme-li tedy $\varepsilon > 0$ a nazveme-li $\delta \leq \varepsilon$, pak
$$(0 <)|x-4| < \delta \Rightarrow \underline{|\sqrt{x}-2| < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|}} \leq \underline{\delta \leq \varepsilon},$$

což jsme měli ukázat,
$$\left(\text{neboť} \quad |\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+2} \leq \delta \leq \varepsilon\right).$$

<u>Ještě další příklad</u>:

(7.) Užitím definice limity ukažte

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$.

Řešení:

a) opět:
k lib. $\varepsilon > 0$ můžeme hledat $\delta > 0$ tak, aby platilo:

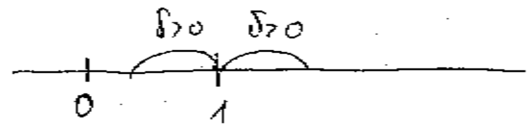
$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \varepsilon ;$$

zvolme $\varepsilon > 0$!

když je (pro nějaké $\delta > 0$) $|x-1| < \delta$, pak

$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \frac{\delta}{|x+1|}$) jak odhadneme shora $\frac{1}{|x+1|}$?

(tj. $|x+1|$ jak odhadneme zdola ?) :



když zvolíme $\delta < 1$, pak bude $x > 0$ a $|x+1| = x+1 \geq 1$, tj. $\frac{1}{|x+1|} \leq 1$, a můžeme odhad

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq |x-1| < \delta$$

a zvolíme-li navíc $\delta < \varepsilon$, pak ne máme:

$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq |x-1| < \delta \leq \varepsilon$,

($\delta \leq \min(1, \varepsilon)$)

což jsme měli ukázat.

b) Podobně můžeme ukázat, že k $\varepsilon > 0$ lib. zvolenému lze najít $\delta > 0$ tak, že platí.

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \; ;$$

zvolme $\varepsilon > 0$:

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2x-4}{3(x+1)} \right| = \frac{2}{3} \frac{|x-2|}{|x+1|} \leq \frac{2}{3}|x-2| ,$$

zvolíme-li (podobně jako v a) omezení pro $\delta > 0$,
t.j. $\delta < 1 \Rightarrow |x+1| \geq 1$

Má-li platit $\left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$,

stačí zvolit $\delta \leq \min\left(1, \frac{3}{2}\varepsilon\right)$, pak

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{2}{3}|x-2| < \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

(Odhad pro δ by se dal ještě vylepšit.)

Poznámka. Je zřejmé, že podobně lze dokázat i následující limity:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 \text{ pro lib. } x_0 \in R ,$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \text{ pro lib. } x_0 > 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x-1}{x+1} = \frac{x_0-1}{x_0+1} \text{ pro lib. } x_0 \neq -1 ,$$

nicméně je jistě vidět, že ověření "z definice" bude jistě obtížnější (odhady budou záviset na x_0) než v předchozí příkladě. Proto je lepší z definice limity odvodit obecně platná tvrzení pro limity součtu, součinu, podílu, absolutní hodnoty a složené funkce (tj. věty o limitách) a pomocí těchto

těchto tvrzení pak limity funkcí určovat.

II. Věty o limitách (důkazy, které nejsou provedeny na cvičení)

Nechť $x_0 \in R$, $A, B \in R$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,

Pak platí:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$

Dk. Stejně jako v předchozích příkladech, musíme ukázat, že platí: k lib. $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|\,|f(x)| - |A|\,\big| < \varepsilon \quad \ldots (*)$$

1) z předpokladu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ víme, že

k $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \,;$$

2) ale také $\big|\,|f(x)| - |A|\,\big| \le |f(x) - A|$, tj. (*) platí

(z 1) a 2) je $\qquad \big|\,|f(x)| - |A|\,\big| \underset{(2)}{\le} |f(x) - A| \underset{(1)}{<} \varepsilon$,

když $0 < |x - x_0| < \delta$)

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B$ (čteme ex. také limita součtu $f(x) + g(x)$ a je rovna součtu limit)

Dk. Opět musíme dokázat: k $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|\big(f(x) + g(x)\big) - (A + B)\big| < \varepsilon$$

zvolme $\varepsilon > 0$;
z předpokladů víme, že
(1) ex. $\delta_1 > 0$ tak, že $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
(2) ex. $\delta_2 > 0$ tak, že $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$,

zvolíme-li $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$, pak

$$\underline{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow \underline{|f(x) + g(x) - (A+B)|} \leq$$
$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \underset{(1)(2)}{<} 2\varepsilon$$

(ono stačí, neboť 2ε je také lib. malé číslo kladné!)
(nebo, zvolíme δ_1, δ_2 tak, aby $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$)

3) $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

Dk. Opět k lib. $\varepsilon > 0$ máme najít $\delta > 0$ tak, aby
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - A.B| < \varepsilon$, (*)
potřebný odhad v (*) je třeba převést na odhady
$|f(x) - A|$ a $|g(x) - B|$.

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x) \cdot g(x) - A \cdot g(x) + Ag(x) - AB| \leq$$
$$\leq |(f(x) - A)||g(x)| + |A||g(x) - B| \quad \dots (4)$$

k (1) a (2) z předpokladu 1 (z věty 1) je třeba přidat odhad $|g(x)|$:
$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = |B|$, tj. k $\varepsilon = 1$ $\exists \delta_3$: $0 < |x - x_0| < \delta_3$
$|g(x)| - |B| \leq |g(x) - B| < 1$, tj.
(3) $\underline{|g(x)| < 1 + |B|}$

Tedy: k $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, pak pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je

$$\left| f(x)g(x) - A \cdot B \right| \underset{(1)(2)(3,4)}{\leq} \varepsilon\,(1 + |B|) + |A| \cdot \varepsilon$$

$$= (1 + |B| + |A|) \cdot \varepsilon \ldots \quad (J)$$

(což opět stačí, i $(1 + |B| + |A|) \cdot \varepsilon$ je lib. malé kladné číslo)

(opět lze volit δ_1, δ_2 tak, aby v odhadu (J) vyšlo ε – – [illegible])

(4) Je-li $B \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$.

opět: jde k lib. $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, aby

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \quad ? \ldots (*)$$

Opět se pokusme odhadnout výraz v implikaci (*):

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)||B|}$$

1) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \equiv$ k $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$

2) $\lim |g(x)| = |B| > 0 \equiv$ k $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$ $\exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |B| - \left|\frac{B}{2}\right| < |g(x)| < |B| + \frac{|B|}{2}$$

tj. $|g(x)||B| > \frac{|B|}{2} \cdot |B| \ldots (2)$

vezmeme-li $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, pak podle (1) a (2) je

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)||B|} \underset{(1)(2)}{<} \varepsilon \cdot \frac{1}{\frac{|B|^2}{2}} = \frac{2}{B^2} \cdot \varepsilon$$ (což je lib. malé ...

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,\ B \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

Důkaz proveďte užitím vět 3. a 4.

6. Věta o limitě složené funkce

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \ (\in R)$, $\lim\limits_{y\to a} f(y) = L$ a nechť existuje $P(x_0,\delta)$ takové, že pro $x \in P(x_0,\delta)$ platí $g(x) \neq a$.

Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to a} f(y) = L$

Důkaz

1) $\lim\limits_{y\to a} f(y) = L \equiv$ k lib. $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0$:
$0 < |y-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - L| < \varepsilon$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \equiv$ k $\delta_1 > 0\ \exists\, \eta_1 > 0$:
$0 < |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |g(x) - a| < \delta_1$

3) $\exists\, \delta > 0\ \forall x$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) \neq a$,
tj. $0 < |g(x) - a|$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ lib., a $\eta = \min(\delta, \eta_1)$, pak platí:

$$0 < |x - x_0| < \eta \underset{(2)(3)}{\Rightarrow} 0 < |g(x) - a| < \delta_1 \underset{(1)}{\Rightarrow} |f(g(x)) - L| < \varepsilon$$

což znamená, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = L$.

7. Věta o limitě sevřené funkce

Nechť (1) $\exists\, P(x_0,\delta_1):\ 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow h(x)\le f(x)\le g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Potom existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Důkaz. $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \equiv$ k lib. $\varepsilon>0\ \exists\, \delta_2>0$:

$0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$

tj. $L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \equiv$ k lib. $\varepsilon>0\ \exists\, \delta_3>0$:

$0<|x-x_0|<\delta_3 \Rightarrow L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$

Zvolme lib. $\varepsilon>0$, vezmeme $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$; pak

$0<|x-x_0|<\delta \underset{(1),(2)}{\Rightarrow} L-\varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < L+\varepsilon$,

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$,

tj. $|f(x)-L|<\varepsilon$, což jsme měli ukázat.

Poznámka Věty 1.–7. platí i pro jednostranné limity. Pokuste se o příslušné formulace vět pro jednostranné limity a dokažte tato tvrzení.

III. Problémy – užití definice limity a základních vět (tvrzení formulujte a dokažte i pro jednostranné limity)

Ukažte, že platí následující tvrzení:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = L$

(užijte definice oboustranné, resp. jednostranné limity)

2. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \Rightarrow$ funkce f nemá v bodě x_0 limitu (oboustrannou)

(užitečné tvrzení pro důkaz neexistence limity)

3. Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, pak pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ je $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$

4. Nechť existují posloupnosti $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$ takové, že $x_n^{(i)} \in P(x_0)$ a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^{(i)} = x_0$, $i = 1, 2$ a nechť $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^{(1)}) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^{(2)})$. Potom f nemá v bodě x_0 limitu. (Podobně i pro jednostranné limity).
(užitečné pro důkaz neexistence limity funkce)

5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $g(x)$ je omezená v nějakém $P(x_0, \delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) . g(x) = 0$

6. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; $A > 0$ (resp. $A < 0$) $\Rightarrow$ existuje $P(x_0, \delta)$ tak, že platí: $x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$).

(7.) Nechť f je neklesající a shora omezená funkce v intervalu (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$. Pak existuje vlastní

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$

Je-li f neklesající a zdola omezená v (a,b), pak existuje vlastní

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) .$$

(Analog. pro nerostoucí omezenou funkci v (a,b) – formulujte sami)

<u>Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a odůvodněte):</u>

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $g(x)$ nemá v x_0 limitu $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a) $f(x)+g(x)$ nemá limitu ;

b) $f(x)\cdot g(x)$ nemá limitu.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $g(x)$ je nerostoucí a omezená v $P(x_0,\delta)$ (resp. $g(x)$ je neklesající a omezená v $P(x_0,\delta)$). Potom existuje $\lim\limits_{x\to x_0+} (f(x)+g(x))$ i $\lim\limits_{x\to x_0-} (f(x)+g(x))$.

Musí také existovat $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$?

Promyslete i pro limitu součinu $f(x).g(x)$ v bodě x_0.

CVIČENÍ - Spojitost funkce

<u>Definice:</u> f je spojitá v x_0, když $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f je spojitá v x_0 zprava (zleva), když $\lim_{x \to x_0+ \,(-)} f(x) = f(x_0)$.

<u>Poznámka</u> f je spojitá v $x_0 \Rightarrow f$ je def. v nějakém $U(x_0)$
(analog. pro spojitost v $x_0 \pm$)

<u>Ekvivalentně</u>: f je spojitá v $x_0 \equiv$

$\equiv \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(formulujte i pro spojitost v x_0 zprava, resp. zleva)

<u>Problémy a příklady</u> (formulujte a promyslete důkaz i pro jednostrannou spojitost)

<u>Ukažte, že platí</u>:

1. f, g jsou spojité v $x_0 \Rightarrow$ 1) $f+g$ je spojitá fce v x_0
   2) $f \cdot g$ je spojitá v x_0
   3) je-li $g(x_0) \neq 0$, pak $\frac{1}{g}$ je spojitá fce v x_0

2. g je spojitá v x_0, f je spojitá v $y_0 = g(x_0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ složená funkce $f \circ g$ (tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$) je spojitá v bodě x_0.

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $f(x_0) > 0$ (< 0), f je spojitá v $x_0 \Rightarrow \exists\, U(x_0)$ takové, že platí: $x \in U(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

2. a) f je spojitá v x_0, g je omezená v $U(x_0) \Rightarrow f+g$ je spojitá v x_0
   b) f je spojitá v x_0, g je omezená v $U(x_0) \Rightarrow f \cdot g$ je spojitá v x_0
   c) f je spojitá v x_0, $f(x_0) = 0$, g je omezená v $U(x_0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow f \cdot g$ je spojitá v x_0

3. Najděte příklad situace, kdy
   a) f je spojitá v x_0, g není spojitá v x_0 a $f \cdot g$ je spojitá v x_0?
   b) f —"—, g —"— a $f+g$ je spojitá v x_0?
   c) f není spojitá v x_0, g není spojitá v x_0 a $f+g$ je spoj. v x_0?

4. Sestrojte funkci f, definovanou v R, která ~~splňuje~~
   (a) není spojitá v bodě 0
   (b) není spojitá ~~zprava~~ zprava v bodě 0
   (c) je spojitá v $R - \{0\}$ a neexistuje ani jedna z jednostranných limit v bodě 0.

5. Ukažte, že platí (ukažte na příkladech):
Nechť f_1, f_2, f_3 jsou takové, že platí: $f_1 + f_2 + f_3$ je funkce spojitá v $x_0 \in R$. Pak buď všechny funkce f_1, f_2, f_3 jsou spojité v x_0 nebo aspoň dvě z nich jsou nespojité v bodě x_0.

6 Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (a odůvodněte):

(a) Nechť existuje okolí $U(0)$, na kterém funkce f není omezená. Potom f není spojitá v bodě 0.

(b) Nechť funkce f není omezená na žádném okolí bodu 0. Potom f není spojitá v bodě 0.

7. Ukažte, že platí:

Nechť funkce f, g jsou spojité v R, $g(x) > 0$ v R a nechť $|f(x)| = g(x)$ pro všechna $x \in R$. Pak buď $f(x) = g(x)$ pro v. $x \in R$ nebo $f(x) = -g(x)$ pro v. $x \in R$.

Platí toto tvrzení i pro $g(x) \geq 0$?
Platí toto tvrzení, pokud nepředpokládáme spojitost funkce f v R ?

8 Vyslovte a dokažte tvrzení o souvislosti spojitosti funkce v bodě x_0 a spojitosti f v x_0 zprava a zleva.

Příklady: 1) Ukažte, že následující funkce jsou spojité ve svých definičních oborech (odůvodněte):

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 2},$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

2) Ukažte, že funkce $\sin x$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$

3. Ukažte, že funkce $\sin x$ je spojitá v R.

4. Ukažte, že funkce $\cos x$ je spojitá v R.

(5.) Ukažte, že funkce $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{cotg} x$ jsou spojité ve svých definičních oborech.

(6.) Ukažte, že funkce f, definované předpisem

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$

je spojitá v R;

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

není spojitá v bodě 0;

c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ nemůže být v bodě 0 dodefinována tak, aby byla v bodě 0 spojitá;

d) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

je spojitá v R.

(7.)* Ukažte, že platí: nechť f je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$ a $f(\langle 0,1 \rangle) \subset \langle 0,1 \rangle$, pak existuje $x_0 \in \langle 0,1 \rangle$ tak, že $f(x_0) = x_0$

(Návod: najděte tvrzení: z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat posloupnost konvergentní)

(8) Charakterizujte všechny funkce, spojité v R, které nabývají pouze racionálních hodnot.

CVIČENÍ

Nevlastní limity a limity v nevlastních bodech

I. Užití definice

(1.) Užitím definice limity ukažte:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Řešení. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\equiv$

$$\equiv \forall K (>0) \ \exists \delta > 0 \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

j. musíme ukázat, že, zvolíme-li lib. K (stačí >0), pak lze najít takové $\delta > 0$, že platí:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > K \quad \ldots \quad (*)$$

---

tedy $\frac{1}{x^2} > K$?, $\qquad \frac{1}{x^2} > K > 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0 \qquad 0 < x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow$

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

tedy, aby platilo pro zvolené $K > 0$ (*), stačí zvolit $\delta < \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Podobně:

b) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Řešení: definice vl. limity v nevlastním bodě:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L\,(\in R) \equiv \forall \varepsilon>0\ \exists k\ \forall x: \quad x>k \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon,$$

tj. zde můžeme ukázat, že, zvolíme-li $\varepsilon>0$, nalezneme k (>0 stačí) tak, že bude platit:

$$x>k \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$$

? kdy tedy bude $0<\frac{1}{x^2}<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

zde stačí uvaž. $x>0$, tj.

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

tedy lze $0<k<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, pak, je-li $x>k>0$, je $x^2>k^2$ a $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{k^2} < \varepsilon$,

což jsme měli ukázat.

Podobně:

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$:

Def: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \equiv \forall K(>0)\ \exists k(>0)\ \forall x: \quad x>k \Rightarrow f(x)>K,$

zvolme $K(>0)$ lib., můžeme nalézt $k(>0)$ tak, aby, kdykoli

$x>k$, pak $3x^3>K$

má-li být $3x^3>K$, pak $x>\sqrt[3]{\frac{K}{3}}$, tedy

lze volit $k \geq \sqrt[3]{\frac{K}{3}}$.

Potom, když $\underline{x > k} \geq \sqrt[3]{\frac{K}{3}}$, je

$$\underline{3x^3 > K},$$

což jsme měli ukázat.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ (samí podobné z def. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$)

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

(2.) Ukažte, že platí!

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad (x_0 \in R \vee x_0 = \pm\infty)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ f(x) \neq 0 \text{ v } P(x_0)}} f(x) = 0 \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) > 0 \text{ v } P(x_0) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) < 0 \text{ v } P(x_0) \implies \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

(3) Ukažte, že platí:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad g(x) \geq f(x) \text{ v } P(x_0) \implies$

$\implies \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \quad (x_0 \in R \vee x_0 = \pm\infty)$

Poznámka: $P(+\infty) = (k, +\infty)$, $k \in R$
$P(-\infty) = (-\infty, k)$

b) Pro všechna $x \in R$ platí $e^x \geq x+1$.
Odtud a z úlohy a) ukažte, že
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty .$$

c) Ukažte, že $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

(4) Ukažte, že platí:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $g(x)$ je zdola omezená v nějakém $P(x_0)$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$

b) Platí za předpokladů z a), že také $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = +\infty$?
Pokud tomu neplatí, pokuste se doplnit předpoklady na funkci g tak, aby $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = +\infty$.

c) formulujte analogická tvrzení k a, b) pro nevlastní limitu $-\infty$.

(5.) Ukažte, že platí

$\lim\limits_{x \to \underset{(-)}{+\infty}} f(x) = a$ $(a \in R, a = \pm\infty)$ $\Rightarrow$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \underset{(-)}{+\infty}$ je $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = a$.

Pomocí tohoto tvrzení ukažte, že funkce
$\sin x$, $\cos x$, $2+\sin x$, $x.\sin x$ nemají v $+\infty$ (ani v $-\infty$) limitu.

(6) Užitím příkladu 4, ukažte, že

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 (2 + \sin x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cos x - 2x) = -\infty$

(7) Ukažte, že platí věta o limitě sevřené funkce i pro limitu v nevlastním bodě $\pm\infty$.
Pak ukažte, že

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$ a také $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} . \cos x = 0$

(8) a) Modifikujte větu o limitě složené funkce i pro limity v nevlastním bodě i pro nevlastní limity. Tvrzení dokažte.

b) Ukažte, že $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ (subst. $x = -y$)

c) Ukažte, že $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ (subst. $x = \frac{1}{y}$)

(9) Modifikujte (a dokažte) pravidla pro výpočet limity součtu, součinu a podílu funkcí i pro případ, kdy některá (~~nebo obě limity~~) z limit je nevlastní (případně obě limity)

Jak počítat limity funkcí?

A) buď lze limitu určit pomocí pravidel pro výpočet limit a znalostí limit elementárních funkcí a některých základních limit

pravidla: 1) f je spojitá v $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $f(x) = g(x)$ v $P(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

(úpravy výrazů)

3) „pravidla" pro $|f|$, $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (a $\frac{1}{g}$) a $f\circ g$ (složené fce)

základní limity:

a) elementární funkce x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x jsou spojité ve svých definičních oborech

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

B) nebo je to jeden z „neurčitých výrazů"

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ nebo $\infty - \infty$,

pak je třeba takový výraz upravit tak, abychom se dostali do A)

C) „část" výrazu nemá limitu – pak rozhodujeme (věta o limitě sevřené funkce a její analogie pro nevlastní limity).

Příklady :

1) Jednoduché limity

$$\lim_{x\to 2} (3x+1) = 7 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{3}{5} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} \qquad \lim_{x\to 2} \ln(x^2-3) = 0$$

$$\lim_{x\to 1+} \sqrt{x^2-1} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

2) limity typu „$\frac{1}{\infty}$" $(=0)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x + 1} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

3) limity typu „$\frac{1}{0}$"

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \left(\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ a } x^2 > 0 \text{ v } P(0) \right)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 2\pm} \frac{1}{x-2} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 3\pm} \frac{1}{3-x} = \mp\infty$$

$$(x\to 3+ \Rightarrow 3-x<0,\ x\to 3- \Rightarrow 3-x>0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{\sin x} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}\pm} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \frac{\sin x}{\cos x} = \mp\infty \qquad \left(\begin{array}{l} x\to\frac{\pi}{2}+ \Rightarrow \operatorname{tg} x<0 \\ x\to\frac{\pi}{2}- \Rightarrow \operatorname{tg} x>0 \end{array}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \quad (e^x>0 \text{ v } R)$$

4) Základní limity a věta o limitě složené funkce.

$$\lim_{x\to 1+} \sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty \qquad \left(\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to 1+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{y\to 0+} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3-} \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \lim_{y\to +\infty} \ln y = +\infty \quad \left(\lim_{x\to-3-} \frac{x-1}{x+3} = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to 1+} e^{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x\to 1-} e^{\frac{1+x}{1-x}} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3-x}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1$$

5) Limity typu „$\frac{0}{0}$"

(upravami se převedou na limity, které lze určit postupem v A))

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x(x-1)} = \ell_{x\to 0} \cdot \frac{x+2}{x-1} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x^4-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x^3(x-1)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x+2}{x-1}}_{\to -2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\text{nebo} \quad - \quad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \ell_{x\to 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\right)$$

stejně:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$(x_0 > 0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \ell_{x\to 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x-1} \quad \text{neexistuje,}$$

neboť

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{x+5}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+5) = 6$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3,$$

neboť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$ (limita složené funkce, Stejně:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{4x}\cdot\frac{4x}{\operatorname{tg} 4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sin(x+1)}\cdot(x^2-x+1) = 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{+\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{-1}{\cos x+1} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1}\cdot\frac{-1}{\cos x+1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|\sin x|}$$ neexistuje,

neboť $\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x} = 1$

ale $\lim_{x\to 0-}\frac{x}{|\sin x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{x}{-\sin x} = -1$ $\Big\}\ \neq$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{y\to 1\\ 1+x=y}}\frac{\ln y}{y-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1\right.$$

(věta o limitě složené funkce)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=1\cdot\ln a=\ln a$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=1\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{x^2}{-x^2}\cdot\underbrace{\frac{-x^2}{\ln(1-x^2)}}_{\to 1}=-1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=$$

$(x>0)$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

6) limity typu „$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+3x+2}{2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

neboť $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}}_{\to\frac{1}{2}}=$$

$$=+\infty$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=$$

$$=0\qquad\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

($x=\sqrt{x^2}$ pro $x>0$)

ale také! $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=$

$\sqrt{x^2}=x$ pro $x>0$

$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\right)$ $\qquad=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

! $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ pro $x<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt[4]{x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^{-\frac{2}{3}}+1\right)}{x\left(x^{-\frac{3}{4}}+2\right)}=\frac{1}{2},$$

(neboť $\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{2}{3}}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{3}{4}}=0$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}=1\quad\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}=-1$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim_{y\to-\infty}e^{y}=0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{y\to 1} \ln y = 0 \quad \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x^2}} = \lim_{y\to 0} e^{y} = 1 \quad \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x^2} = 0\right)$$

7) limity typu „$0 . \infty$"

(převedou se na limity typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$")

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}\cdot(-3)}}_{\to 1} \cdot (-3)\right) = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} =$$

$$= 0 \text{ (limita součinu)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

8) limity typu „$\infty - \infty$“

(převedou se na limity jiné – nejčastěji součinu – které lze určit dle pravidel, nebo, pokud dostaneme $0 . \infty$, dále na limity typu „$\frac{0}{0}$“ nebo „$\frac{\infty}{\infty}$“)

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(„vytkne se „nejvyšší“ ∞) $\quad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right)$$ (– zde dostaneme „$\infty \cdot 0$“, musíme dále)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1}}_{\to \frac{1}{2}} = 0$$

nebo převedeme na limitu podílu:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0 \quad \left(„\frac{1}{\infty}“\right)$$

stejně:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1} + x} \quad \left(= „\frac{\infty}{\infty}“\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

9) $$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} \overset{def.}{=} \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)} \quad (f(x) > 0 \text{ a } P(x_0))$$

(užije se věta o limitě složené fce – $\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = q$, a $\lim_{y \to a} e^y$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to1} e^y = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (\text{viz část } 7)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{y\to-2} e^y = e^{-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) \underset{(\text{část } 7)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{y\to0} e^y = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) \underset{(7)}{=} 0$$

9) <u>vypočti limitu užitím věty o limitě sevřené funkce</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x = 0, \quad \text{neboť} \quad -\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\sin x \le \frac{1}{x}$$

$$\text{a} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x = 0, \quad \text{neboť} \quad -e^{-x} \le e^{-x}\cos x \le e^{-x}$$

$$\text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\sin x) = +\infty, \quad \text{neboť } x+\sin x \geq x-1 \text{ a } \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2+\sin x) \cdot x^2 = +\infty, \quad \text{neboť } (2+\sin x)\cdot x^2 \geq x^2 \text{ a } \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \cdot \cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} = 0,$$

neboť: 1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$, a tedy

(věta o limitě složené funkce) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right) = 0$

2) $\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ je funkce omezená v $(0,+\infty)$.