**DOMÁCÍ TEST umění integrovat.** — Výsledky

**I. V následujících příkladech vždy najděte největší otevřený interval, kde existuje daný integrál**
**a integrál pak vypočítejte.**

1. $\int \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = -2(1-\sqrt{x})\left(\ln(1-\sqrt{x})-1\right)+C,\quad x\in(0,1)$

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx = -\operatorname{arctg}(\cos x)+C,\quad x\in R$

3. $\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C,\quad x\in R$

4. $\int\left(\frac{1}{\ln^2 x+1}\frac{1}{x}+\frac{e^x-2}{e^{2x}-2e^x+2}\right)dx = \operatorname{arctg}(\ln x)-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}-2e^x+2)+C,$
$x\in(0,+\infty)$

5. $\int\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)}\right)dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-2\ln(\sqrt{x}+2)+$
$\ln(x+6\sqrt{x}+10)+4\operatorname{arctg}(\sqrt{x}+3)+C,\quad x\in(0,+\infty)$

6. $\int\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}+\frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^x+5}\right)dx = 2\sqrt{\ln x}+\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4e^x+5)-2\operatorname{arctg}(e^x+2)-x+C,$
$x\in(1,+\infty)$

7. $\int\left(\frac{1}{x^3}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-1\right)+$ —"—
$x\in(-\infty,-1),\ x\in(1,+\infty)$

8. $\int\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{7\sqrt{x}-4}{2x(x-2\sqrt{x}+2)}\right)dx = -\sqrt{1-x^2}-2\ln\sqrt{x}+\ln(x-2\sqrt{x}+2)+$
$+5\operatorname{arctg}(\sqrt{x}-1)+C,\quad x\in(0,1)$

**II. Aplikace určitého integrálu.**

1. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy $x$, kde
$$\omega=\left\{[x,y];-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\cos x\right\}.$$
$V=\frac{\pi^2}{2}$

2. Vypočítejte obsah rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí
$$y=x^2-2x-1 \quad \text{a} \quad y=x-1.$$
$S=\frac{9}{2}$

3. Vypočítejte obsah rovinné oblasti ω, kde
$$\omega=\left\{[x,y];\ 0\le x\le 1, 0\le y\le \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right\}.$$
Výpočet začněte substitucí $\sqrt{x}$.
$S=\frac{\pi}{2}-1$

4. Vypočítejte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = \ln x, 1 \le x \le e$ kolem osy $x$.

$V = \pi(e-2)$

5. Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí
$y = \frac{2}{x}$ a $y = 3 - x$.

$S = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

6. Vypočítejte obsah rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafy funkcí
$y = x^2$ a $y = \sin^2 x$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$S = \frac{\pi}{24}(\pi^2 - 6)$

7. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafem funkce $y = \ln x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[1,0]$ a přímkou $x = e$ kolem osy $x$.

$V = \frac{\pi(e-1)^3}{3} - \pi(e-2)$ (viz 4)

8. Vypočítejte velikost obsahu rovinné oblasti která je ohraničená křivkami
$y = x^2 - 2x - 1$ a $y = 3 - x^2$.

$S = 9$

9. Vypočítejte obsah rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafem funkce $y = \arcsin x$, tečnou ke grafu této funkce v počátku a přímkou $x = 1$

$S = \frac{1}{2}(\pi - 3)$