

Ukázka zápočtového testu z Matematické analýzy I (ze ZS 2018-19)
(psal se 90 minut a bez "taháků")

1. Vypočítejte limitu ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}$.

nebo

Vypočítejte limitu ($n \in \mathbb{N}$): $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \log \left(1 - \operatorname{tg} \frac{3}{n} \right)$.

($\log x$ je přirozený logaritmus)

2. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete, zda konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} (x-2)^n.$$

3. Funkce f je definována :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \text{ pro } |x| \geq 1.$$

Ukažte, že funkce f i její derivace f' jsou funkce spojité v \mathbb{R} .

nebo

Funkce f je definována :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{|x|} \text{ pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Vyšetřete spojitost funkce f v D_f . Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

4. Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2} \quad \text{nebo} \quad f(x) = |x-2| \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

nebo:

Vyšetřete průběh zadané funkce:

najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f a limity v krajních bodech ;
vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotónii, lokální a globální extrémy funkce f ;
vypočítejte druhou derivaci, najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp.
konkávni;
načrtněte graf funkce .