

Jméno:

1. Je dána funkce $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x+1}\right)$.

- Najděte definiční obor $D(f)$ funkce f a načrtněte jej.
Je $D(f)$ množina otevřená nebo uzavřená? Tvrzení odůvodněte.
- Vypočítejte $\nabla f(0, 0)$.
- Ukažte, že funkce f má v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál. a diferenciál v tomto bodě určete.
Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty funkce $f(x, y)$ v okolí bodu $(0, 0)$.
- Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0, 0, 0)$.
- Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř? (10 bodů)

2. Je dána rovnice $z^3 - 2xz + y = 0$.

- Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z = f(x, y) \in C^2(U(1, 1))$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$.
- Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.
- Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty funkce $f(x, y)$ v okolí bodu $(1, 1)$.
- Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$.

(10 bodů)

3. Vysvětlete, proč funkce f nabývá na množině M svých globálních extrémů, je-li

$$f(x, y) = xy \quad \text{a} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Tyto globální extrémy najděte.

(10 bodů)