Matematická analýza 2 - zápočtový test (28. 5. 2017)

Jméno :

---

1. Na maximálním možném intervalu najděte primitivní funkci k funkci

$$f(x)=\frac{\sin x.\cos x}{(\cos x)^4+1}+\frac{7e^x-10}{e^{2x}-4e^x+5}\quad .$$

(12 bodů)

2. Spočítejte obsah rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafy funkcí $y = x\,arctg\,x$, $y = x^2$ a přímkou $x = 1$.

(8 bodů)

nebo

2. Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené rovinou $z = 0$ a plochami $z = 4 - y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$. (10 bodů)

3. Je dána funkce $$f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x+1}$$

   a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál a diferenciál v tomto bodě určete.
   d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0,0,0)$.
   e) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?

(10 bodů)

4. Je dána rovnice $$z^3 + y^3z^2 - xyz + x^3 - 2 = 0 \quad .$$

   a) Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z = f(x,y) \in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $z(1,1)=1$.
   b) Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.
   c) Pomocí Taylorova polynomu 1.stupně určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.
   d) Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$.

(10 bodů)

nebo

4. Vysvětlete, proč existují globální extrémy funkce f na množině M a tyto globální extrémy najděte, je-li
$$f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2 \quad \text{a} \quad M = \{(x,y) \in R^2;\, 4x^2 + y^2 \le 25\} \quad .$$ (10 bodů)

MAI2 – zápočet 28.5.17

① $x \in R$ (f je spojitá fce v R $\Rightarrow$ f má v R primit. fci)

$$\int\left(\frac{\sin x\cos x}{(\cos x)^4+1}+\frac{7e^x-10}{e^{2x}-4e^x+5}\right)dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x+1}\,dx \underset{1VS}{=} \left|\begin{array}{l}\cos^2 x = t\\ 2\cos x(-\sin x)\,dx = dt\end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, t + C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\cos^2 x) + C,\quad x\in R$$

$$I_2 = \int\frac{7e^x-10}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx = \left|\begin{array}{l}e^x = t\\ x = \log t\\ x' = \frac{1}{t}\end{array}\right| \underset{2VS}{=} \int\frac{7t-10}{t\,(t^2-4t+5)}\,dt =$$

$$= -2\int\frac{1}{t}\,dt + \int\frac{2t-1}{t^2-4t+5}\,dt = -2\log t + \int\frac{2t-4}{t^2-4t+5}\,dt + 3\int\frac{1}{(t-2)^2+1}\,dt$$

$(t>0)$

$$= -2\log t + \log(t^2-4t+5) + 3\,\mathrm{arctg}(t-2) + C =$$

$$= -2x + \log(e^{2x}-4e^x+5) + 3\,\mathrm{arctg}(e^x-2) + C,\quad x\in R$$

Rozklad na parciální zlomky

$$\frac{7t-10}{(t^2-4t+5)\,t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2-4t+5}$$

$$7t-10 = A(t^2-4t+5) + Bt^2 + Ct,$$

tj. $A + B = 0$, $\quad -4A + C = 7$, $\quad 5A = -10 \Rightarrow A = -2$; $\quad B = 2$, $\quad C = -1$

② $$S = \int_0^1 (x^2 - x\,\mathrm{arctg}\,x)\,dx, \quad \text{neboť}$$

- $x^2 = x\,\mathrm{arctg}\,x \iff x = 0 \lor x = \mathrm{arctg}\,x \;(\iff x = 0)$
- v $\langle 0,1\rangle$ je $\mathrm{arctg}\,x \le x$ ($x \ge 0$) $\Rightarrow x\,\mathrm{arctg}\,x \le x^2$

(Dk např.: $x - \mathrm{arctg}\,x = \varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \ge 0$
$\Rightarrow \varphi(x)$ je ~~ros~~ neklesaj. v $\langle 0,1\rangle$ (rostoucí v $(0,1\rangle$)
tedy $\varphi(x) > 0$ v $(0,1\rangle$, a tedy $x > \mathrm{arctg}\,x$ v $(0,1\rangle$)

Výpočet integrálu:

$$\int_0^1 (x^2 - x\,\mathrm{arctg}\,x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[x^2\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,x - 1\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx \underset{pp.}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \mathrm{arctg}\,x, & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[x^2\mathrm{arctg}\,x - x + \mathrm{arctg}\,x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Úloha!

2) $V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$, kde Ω je ohraničena $z=0$, $z=4-y^2$ a $y=\frac{x^2}{2}$

$0 \le z \le 4-y^2$, tj. $y^2 \le 4 \iff |y| \le 2$, a proto $\frac{x^2}{2} \le y \le 2$,

$\Rightarrow$ tj. $x^2 \le 4$ a $|x| \le 2$

a odtud: (F. věta)

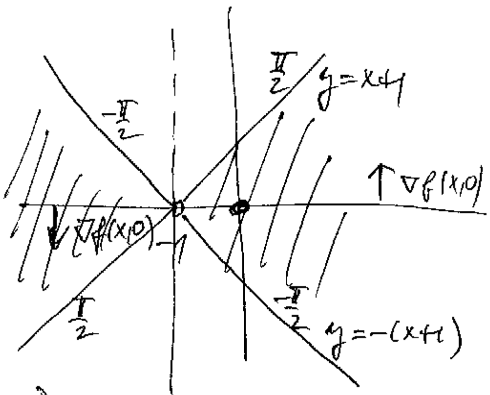
$$V(\Omega) = \int_{-2}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} dy \int_0^{4-y^2} dx = \int_{-2}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} (4-y^2)\,dy = \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{\frac{x^2}{2}}^{2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{16}{3} - \left(2x^2 - \frac{x^6}{24}\right)\right)dx = 2\int_0^2 \left(\frac{16}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right)dx =$$

$$= 2\left[\frac{16}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^7}{7\cdot 24}\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3} + \frac{\cancel{4}\cdot 2^{\cancel{8}4}}{7\cdot\cancel{24}\,3}\right) = 2\left(\frac{7\cdot 16 - 16}{21}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot\cancel{6}\cdot 16}{\cancel{21}\,7} = \frac{32}{7}\cdot 2 = \frac{64}{7}$$

(3) $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$



a) $Df = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x\neq -1 \wedge \left|\frac{y}{x+1}\right| \leq 1\} =$
$= \{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x\neq -1 \wedge |y|\leq|x+1|\}$

D není ani otevřená, ani uzavř. množina

b) $$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{y}{(x+1)^2}, \frac{1}{x+1}\right)$$

$\nabla f(0,0) = (0,1)$ (v bodech $[x,0]$ je $\nabla f(x,0) = \left(0, \frac{1}{x+1}\right)$
směr „největšího" růstu , $\to 0$ pro $x\to\pm\infty$

$(0,0)\in Df$

c) $f\in C^{(1)}(D^\circ) \Rightarrow f$ je dif. v D° (t.j. v $D^\circ = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x\neq-1$ a $\left|\frac{y}{x+1}\right|<1\}$
$(0,0)\in D^\circ \Rightarrow f$ je dif. v $(0,0)$ (neboť zde spojité parc. derivace)
a $df(0,0)(h,k) = k$ $\quad (df(0,0)(h_1,h_2) = h_2)$

d) tečná rovina v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$: $z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)$, tj.
zde $z = 0 + y$, tj. $y - z = 0$

normála ke grafu f v $(0,0,0)$: $(x,y,z) = t(0,1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$

e) $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ v $D^\circ \Rightarrow$ f nemá lok. extrémy

na hranici: $y = x+1, x\neq-1$ $\quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = f(x,x+1)$
— glob. maximum
(neostré)

$y = -(x+1), x\neq-1$ $\quad f(x,-(x+1)) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$
— neostré glob. minimum

(4) $\left(F(x,y,z) \equiv\right) \quad z^3 + y^3 z^2 - xyz + x^3 - 2 = 0 \qquad (*)$

a) ? je rovnicí $F(x,y,z) = 0$ def. v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitní funkce $z = f(x,y)$ (t.j. $f(1,1) = 1$)

Předpoklady věty o implicitní funkci:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F(1,1,1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0 \\ 2) & F \in C^\infty(R^3) \\ 3) & \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 3z^2 + 2y^3 z - xy \Big|_{(1,1,1)} = 4 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{věta o impl. fci}$$

rovnicí $(*)$ je v okolí $(1,1,1)$ def. implicitní fce $z = f(x,y)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$:

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^3 \cdot 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - yz - xy \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(3z^2 + 2y^3 z - xy\right) = -3x^2 + yz$$

v $(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \cdot 4 = -2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$:

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 3y^2 z^2 + 2y^3 \cdot z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - xz - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(3z^2 + 2y^3 z - xy\right) = +xz - 3y^2 z^2$$

v $(1,1)$: $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \cdot 4 = -2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$

c) a lin

$$f(x,y) \doteq f(1,1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$$

$$f(x,y) \doteq 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$$

$$\left(f(1{,}02;\, 0{,}96) \doteq 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 - \frac{1}{2}(-0{,}04) = 1{,}01 \right)$$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(3z^2 + 2y^3 z - xy\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\left(6z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 6y^2 z + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - x\right) = z + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

v $(1,1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}(1,1) \cdot 4 - \frac{1}{2}\Big(\underbrace{6 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 6 + 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) - 1}_{=1}\Big) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) \cdot 4 = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{4}$$

nebo

4 $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4x^2+y^2 \le 25\}$

(lokální a) glob. extrémy f na M

(i) f je spojitá na M, M je kompaktní množina (M – uzavřená – $M = \varphi^{-1}(\langle 0,25\rangle)$, kde $\varphi(x,y) = 4x^2+y^2$ je spojitá fce) ⇒

2) M je omezená! $x^2+y^2 \le 4x^2+y^2 \le 25$

⇒ f nabývá na M glob. extrémů !

(ii) extrémy f na M

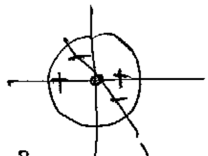
1) v $M^0 = \{(x,y);\ 4x^2+y^2<25\}$: f má (spojité) derivace v M^0 ⇒

⇒ f může mít glob. extrém (⇒ i lok.) jen v bodech, kde

$$\nabla f(x,y) = (2x+12y,\ 4y+12x) = (0,0)$$

tj. $x+6y=0$, $3x+y=0$ ⇔ $\underline{(x,y)=(0,0)\in M^0}$, $\underline{f(0,0)=0}$

(není zde extrém ani lokální:



$f(x,-x) = 3x^2-12x^2 = -9x^2<0$, $y=-x$

stejně $H_f(0,0) = \begin{vmatrix}2, & 12\\ 12, & 4\end{vmatrix} = 8-12^2<0$)

2) na hranici $\partial M = \{(x,y);\ 4x^2+y^2=25\}$

metoda Lagr. multiplikátorů: $G(x,y) = 4x^2+y^2-25$, $\nabla G(x,y) = (8x,2y) \ne \vec{0}$ na ∂M ✓

extrém může být jen v bodech,

kde $\underline{\nabla f = \lambda \nabla G}$, tj.

$$\begin{cases} 2x+12y = \lambda\cdot 8x \\ 4y+12x = \lambda\cdot 2y \\ 4x^2+y^2 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-4\lambda)x + 6y = 0 \\ 6x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \text{ a } 4x^2+y^2=25, \text{ tj. } (x,y)\ne(0,0)$$

má nenulové řešení ⇔ $\begin{vmatrix} 1-4\lambda, & 6 \\ 6, & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$ (matice soustavy je singulární)

$$\iff (\lambda-2)(4\lambda-1)-36 = 0$$

$$4\lambda^2 - 9\lambda - 34 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{81+544}}{8} = \frac{9\pm\sqrt{625}}{8} = \frac{9\pm 25}{8} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4},\ -2$$

$34\cdot 16 = 204$, 544

$\lambda_1 = -2$:

$$6x + 4y = 0$$
$$y = -\frac{3}{2}x$$

$$4x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 25$$
$$25x^2 = 100$$
$$x^2 = 4, \quad x = \pm 2$$
$$y = \mp 3$$

$[2, -3]$ a $[-2, 3]$

$\lambda_2 = \frac{17}{4}$:

$$6x + \left(2 - \frac{17}{4}\right)y = 0$$
$$6x - \frac{9}{4}y = 0$$
$$2x - \frac{3}{4}y = 0$$
$$8x - 3y = 0$$
$$y = \frac{8}{3}x$$

$$4x^2 + \frac{64}{9}x^2 = 25$$
$$36x^2 + 64x^2 = 25 \cdot 9$$
$$100x^2 = 25 \cdot 9$$
$$x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm \frac{3}{2}$$
$$y = \pm \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{8}{\cancel{3}}$$

$\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ a $\left[-\frac{3}{2}, -4\right]$

a pak tedy:

$f(2,-3) = f(-2,3) = 4 - 12 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 22 - 72 = -50$ – glob. minimum f na M

$f\left(\frac{3}{2}, 4\right) = f\left(-\frac{3}{2}, -4\right) = 4 + 12 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} + 2 \cdot 16 =$

$4 + 72 + 32 = 108$ – glob. max f na M