

Rozšíření MA1.**Domácí úkol LA 1a - Příklady z lineární algebry.**

(vyberte si a vyřešte aspoň šest příkladů z dvanácti zde zadaných)

Jméno a příjmení :

1. Buďte dány vektory $\vec{u} = (3, 2, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Spočítejte $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.2. Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 3), \quad \vec{u}_2 = (0, 2, 1, 0), \quad \vec{u}_3 = (0, 0, -1, 1) .$$

a) Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.b) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ basi prostoru R^4 ? Svě tvrzení odůvodněte.Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4 .c) Zjistěte, zda vektory $\vec{v} = (1, -3, -1, 5)$, resp. $\vec{w} = (-1, 1, -3, -2)$ jsou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, a pokud ano, najděte, jakou kombinací.Jinak řečeno – máte rozhodnout, zda vektory \vec{v} a \vec{w} jsou prvky lineárního obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.3. Existuje reálné číslo a , pro které jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in R^4$ lineárně závislé, je-li :

$$\vec{u}_1 = (0, 0, -1, a^2), \quad \vec{u}_2 = (1, 2a, -a, 1), \quad \vec{u}_3 = (0, 0, 0, 3), \quad \vec{u}_4 = (0, 2, a^3, 1) ?$$

4. a) Definujte pojem base vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané basi .b) Ukažte, že vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, -1)$, $\vec{b}_3 = (0, 1, 2)$ tvoří basi prostoru R^3 .c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, 3, 3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

5. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Určete hodnotu matice A .

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte .

6. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .
 b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimenze 2.
-

7. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

8. Buďte dány matice

$$\text{i) } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -1 & 0 & 2 \\ b & b & -3b \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (i) vypočítejte $\det M$;
 (ii) vypočítejte $\det N$;
 (iii) vypočítejte $\det(M \cdot N)$ a ukažte, že zde platí : $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N$ (tak, jak říká „věta“ o determinantu součinu čtvercových matic).
-

9. Najděte všechna řešení rovnice

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

10. A „jinak“ formulovaný příklad 3:

Existuje reálné číslo a , pro které je singulární matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

11. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou i užitím determinantů určete matici inverzní k matici A .

12. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji.
 - Užitím inverzní matice řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.
-