

**Rozšíření MA1 pro biochemiky .
Dvojný integrál.**

Vypočítejte integrály:

1. $\iint_D xy \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
2. $\iint_D e^{x+y} \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
3. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$
4. $\iint_D f(x)g(y) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$;
5. $\iint_D (x - y) \, dx \, dy$, kde oblast D je ohraničená přímkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$
6. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$, kde omezená oblast D je ohraničená přímkami $x = 2$, $y = x$ a křivkou $x \cdot y = 1$

V následujících příkladech změňte pořadí integrace:

1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) \, dx$;
2. $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) \, dy$;
3. $\int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x, y) \, dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x, y) \, dy$.

Znáznorněte oblasti, jejichž obsahy jsou vyjádřeny pomocí následujících integrálů:

1. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) \, dy$;
2. $\int_0^\pi dx \int_1^{1+\cos x} f(x, y) \, dy$;
3. $\int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} f(x, y) \, dx$.

Aplikace dvojného integrálu:

1. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ a plochou $z = x^2 + y^2 + 1$.
2. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $z = 0$, $x + y + z = 2$ a plochou $y = x^2$.
3. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 2$ a plochou $y = x^2$.
4. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $z = 4 - y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Zkuste si představit nějaké aplikace integrálu $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, kde $D = \{[x, y]; -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.
6. Vypočítejte hmotnost čtvercové desky o straně $2a$ ($a > 0$) zanedbatelné tloušťky, je-li plošná hustota přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu od středu desky a ve vrcholech čtverce je rovna jedné.
7. Určete těžiště omezené rovinné homogenní oblasti (zanedbatelné tloušťky), ohraničené parabolami $y = x^2$ a $y^2 = x$.
8. Určete moment setrvačnosti homogenního trojúhelníka, ohraničeného přímkami $x = 2$, $y = 2$ a $x + y = 2$, vzhledem k ose x .

Pomocí substituce do polárních souřadnic

I. „Ověřte“ vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R .

II. A spočítejte :

1. $\iint_K (x^2 + y^2) dx dy$, $K = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“ ?
2. $\iint_K (x^2 + y^2) dx dy$, $K = \{[x, y]; (x - R)^2 + y^2 \leq R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“ ?
3. $\iint_D y dx dy$, $D = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.
4. $\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, $D = \{[x, y]; \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
5. Vypočítejte hmotnost kruhu o poloměru R , je-li (plošná) hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu kruhu.
6. Vypočítejte moment setrvačnosti kruhu o poloměru R vzhledem k ose, procházející jeho středem S kolmo na rovinu kruhu, je-li hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu S .