

Rozšíření MA1 - domácí úkol 8

Trojný integrál:

I. Vypočítejte integrály (aspoň dva):

- $\iiint_D (x + y + z) dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$;
- $\iiint_D x dx dy dz$, kde omezená oblast D je ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
a $x + y + z = 1$;
- $\iiint_D y dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$;
- $\iiint_D z^2 dx dy dz$, kde omezená oblast D je ohraničená
a) rovinou $z = 0$ a plochou $z = 1 - x^2 - y^2$;
b) plochou $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 4$.
(užijte válcové souřadnice)

II. Aplikace trojného integrálu (vyberte si aspoň dva příklady):

Trojným integrálem vypočítejte objem tělesa, ohraničeného

- rovinami $x = 0, y = 0, x = 4, y = 4, z = 0$ a plochou $z = x^2 + y^2 + 1$;
- rovinami $z = 0, z = 5, y = 4$ a plochou $y = x^2$;
- rovinami $z = 0, x + y + z = 2$ a plochou $y = x^2$;
- rovinami $z = 0, y = 0, x + y + z = 2$ a plochou $y = x^2$;
- rovinami $x = 0, y = 1, x + y = 3, z = 0$ a plochou $z = xy$;
- plochou $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 4$ (užijte válcové souřadnice) .

„Fyzikální“ aplikace:

- Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2 + 1$,
je-li hustota ρ tělesa v bodě (x, y, z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z .
- Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 4$ a plochou $z = x^2 + y^2$,
je-li hustota ρ tělesa v bodě (x, y, z) rovna
a) $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$; b) $\rho(x, y, z) = z$.
- 3*. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho ose .
- 4*. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa, ohraničeného rovinou $z = 3$
a plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzhledem k ose z .