MA2 – „písemná" přednáška 22.4.2020

Dvojný integrál přes „obecnější" oblast $\omega \subset R^2$:

Budeme stále uvažovat integrál v Riemannově „smyslu", tj. jako limitu, pokud bude existovat konečná, integrálních Riemannových součtů – bude-li $\omega \subset R^2$ obecnější množina než „obdélníček" $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, tak i obecnější oblast ω „rozdělíme na malé kousky", v těch pak „uděláme" aproximaci té veličiny, „kterou chceme integrálem vyjádřit, pomocí vybrané (konstantní) hodnoty funkce v příslušném „kousku" ω, pak opět toto sečteme přes všechny „kousky" a budeme „limitit" při zmenšování" těch kousků" oblasti ω. A teď bychom toto měli vyjádřit „matematicky":

1) Je vidět, že množina ω musí být omezená
   (neomezenou oblast nemůžeme rozdělit na konečný počet částí s konečnou „plochou")

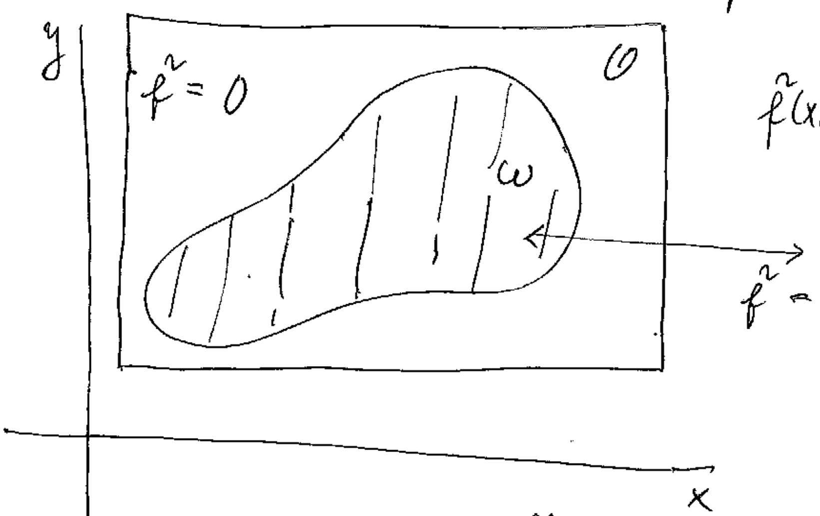
2) ω by měla být taková množina, abychom ji mohli „rozdělit" na takové části, jejichž „plocha by se dala určit – v Riemannově součtu byly sčítanci ve tvaru $f(\xi_i,\eta_j)\Delta_i x \Delta_j y$, $(\xi_i,\eta_j)\in\omega_{ij}$ a $\Delta_i x.\Delta_j y$ byla „plocha" obdélníčku ω_{ij} pro $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ – tedy nejenže kromě vlastností funkce, požadovaných pro existenci $\iint_\omega f(x,y)dxdy$, budou další požadavky i na oblast $\omega \subset R^2$ (na vlastnosti ω)

A nyní už přesněji (na úvod, co nás „čeká", už to snad stačí)

$(R)\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ budeme definovat pro množinu $\bar\omega$ omezenou v R^2 a která je uzávěrem oblasti $\omega \subset R^2$ (tj. $\bar\omega = \omega \cup \partial\omega$, $\partial\omega$ – hranice ω), ω – omezená a funkce $f: \bar\omega \subset R^2 \to R$;

a je nutné $(R)\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ definovat takto:

(i) protože $\bar\omega \subset R^2$ je omezená množina (říkáme „uzavřená oblast“), existuje obdélník $O \subset R^2$ tak, že $\bar\omega \subset O$; dále definujme funkci $\tilde f(x,y)$ v O:



$$\tilde f(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \bar\omega \\ 0, & (x,y) \in O \setminus \bar\omega \end{cases}$$

$\tilde f = f$ (v $\bar\omega$)

a pak lze definovat $\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ takto:

Definice:

Funkce f je R-integrovatelná v $\bar\omega$ (píšeme $f \in R(\bar\omega)$), když $\tilde f \in R(O)$ a

$$\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{O} \tilde f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Viz skripta VŠCHT – doc. Turzík a kol.: Matematika II)

Poznámky k definici:

1) definici snad pochopíte snadněji, když si představíte, že počítáte třeba hmotnost desky O s hustotou $\tilde{f}(x,y)$ – je zřejmé, že takto počítáte hmotnost jen oblasti $\bar{\omega}$ s hustotou $f(x,y)$
nebo – při výpočtu objemu „tělesa" o základně $\bar{\omega}$ a „střeše" $f(x,y) \geq 0$ v $\bar{\omega}$ – počítáte-li objem tělesa o základně O a „střeše" $\tilde{f}(x,y)$, je to zřejmě „totéž".

2) Vypadá to, že definice $\iint\limits_{\bar{\omega}} f(x,y)\,dx\,dy$ už vše vyřešila a dále už bude jen „analogie" k integrálu přes obdélník – – ale není tomu tak: když byla oblast $\bar{\omega}$ dříve $\bar{\omega} = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, pak $\iint\limits_{\bar{\omega}} f(x,y)\,dx\,dy$ existoval pro funkce spojité na $\bar{\omega}$, nebo spojité v $\bar{\omega} \setminus K$, kde K byla množina konečně mnoha bodů a konečně mnoha t.zv. jednoduchých oblouků (teď upřesníme), a omezené na $\bar{\omega}$.
A při zavedení funkce $\tilde{f}$ pro f a O, tak pro spojitost $\tilde{f}$ v O nestačí spojitost funkce f v množině $\bar{\omega}$; $\tilde{f}$ bude spojitá v O, jen když bude $f|_{\partial\omega} = 0$! A to přece nemusí (viz předchozí „příklady" – hmotnost, objem) být!
A odtud jsou „požadavky" na oblast $\bar{\omega}$, další, a to požadavky na hranici $\partial\omega$: z nich o existenci $\iint\limits_{O} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$ plyne, že budeme „chtít", aby $\partial\omega$ byla složena z konečného počtu jednoduchých oblouků – viz dále (a to už stačí).

Dodatek k přednášce 20.2. (pro „pořádek"):

<u>Definice jednoduchého oblouku v R^2:</u>

Jednoduchým obloukem $\overset{\curvearrowright}{L}$ v R^2 nazýváme množinu (v R^2):

$\overset{\curvearrowright}{L} = \{ [x,y] \in R^2 ;\ x = x(t),\ y = y(t) ;\ t \in \langle \alpha, \beta \rangle \}$, kde

. $x(t), y(t) \in C^{(1)}(\langle \alpha, \beta \rangle)$ a platí:

$$\forall t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle : \quad t_1 \neq t_2 \Rightarrow [x(t_1), y(t_1)] \neq [x(t_2); y(t_2)] .$$

Tedy, $\overset{\curvearrowright}{L}$ je obrazem vektorové funkce, mající spojité první derivace (tj. křivka, která má v každém bodě tečnu) a navíc, $\overset{\curvearrowright}{L}$ je křivka, která sama sebe „neprotíná", zobrazení je prosté v $\langle \alpha, \beta \rangle$."

<u>Příklad:</u> 1) <u>graf funkce</u> $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, $f \in C^{(1)}(a,b)$:

$$\overset{\curvearrowright}{L_1} = \{ [x,y] ;\ t \in \langle a, b \rangle,\ x = t,\ y = f(t) \}$$

$(t, f(t))' = (1, f'(t))$ v $\langle a, b \rangle$ a platí

$t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle \Rightarrow [t_1, f(t_1)] \neq [t_2, f(t_2)]$

(neboť $t_1 \neq t_2$)

2) úsečka, daná body $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$:

$$\overset{\curvearrowright}{L_2} : \quad \begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2) \end{aligned} \quad , t \in \langle 0, 1 \rangle$$

3) $$\overset{\curvearrowright}{L_3} : \quad \begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned} \quad , t \in \langle 0, \pi \rangle \quad , R > 0$$

$(R\cos t, R\sin t)' = (-R\sin t, R\cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$

a dále – jako obvykle – existence, vlastnosti, výpočet $\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy$
(a příklady na závěr)

1) <u>Věta (existenční)</u> $\bar\omega$ – omezená a uzavřená oblast v R^2:

a) <u>podmínka nutná</u>: (zůstává „stejná")

$f \in R(\bar\omega) \Rightarrow f$ je omezená na $\bar\omega$

b) <u>podmínka postačující</u>

(i) Je-li $f \in C(\bar\omega)$, tj. f je spojitá na $\bar\omega$, a $\partial\omega$ je sjednocení konečné množiny jednoduchých oblouků, pak $f \in R(\bar\omega)$ (tj. existuje

$$\iint\limits_{\bar\omega} f(x,y)\,dx\,dy \text{).}$$

(ii) Je-li $f \in C(\bar\omega \setminus K)$, kde $K \subset \bar\omega$, K je sjednocení konečné množiny bodů a jednoduchých oblouků, a f je omezená na $\bar\omega$, a $\bar\omega$ splňuje předpoklady v (i), pak $f \in R(\bar\omega)$.

<u>Poznámka (i příklad)</u>

Nechť $\bar\omega$ splňuje předpoklady existenční věty, pak existuje

$\mu(\bar\omega) = \iint\limits_{\bar\omega} 1\,dx\,dy$: $f(x,y)=1$ v $\bar\omega$ je zřejmě spojitá až na $\partial\omega$ (tj. konečné množina oblouků) a omezená $\Rightarrow$ $\Rightarrow 1 \in R(\bar\omega)$ a snadno je „vidět", že $\iint\limits_{\bar\omega} 1\,dx\,dy$ „je" velikost „plochy" $\bar\omega$, tj. „obsah" $\bar\omega$ – – nazývá se „míra" oblasti $\bar\omega$ a značí $\mu(\bar\omega)$,

<u>$\bar\omega$ – měřitelná oblast</u> (obvyklý název).

Obecněji: Je-li oblast $\bar{\omega} \subset R^2$ omezená a existuje-li $\iint\limits_{\bar{\omega}} 1 . dx dy$,
pak $\bar{\omega}$ se nazývá měřitelná oblast a $\iint\limits_{\bar{\omega}} dx dy = \mu(\bar{\omega})$ je
míra množiny $\bar{\omega}$.
(Tedy „naše" oblast $\bar{\omega}$ s dříve popsanou hranicí $\partial\omega$ je měřitelná.)
(Ve skriptech VŠCHT se nazývá „standardní oblast")

2) Vlastnosti $\iint\limits_{\bar{\omega}} f(x,y) dx dy$ (budu dále značit pro jednodušší zápis $\iint\limits_{\bar{\omega}} f$ – často se „vynechávají" x, y, dx, dy)

($\bar{\omega}$ – měřitelná oblast)
Protože je integrál definován „stejně" jako při integraci přes obdélník, vlastnosti má „analogické" – platí

a) linearita:
$f, g \in R(\bar{\omega})$, $\alpha \in R$, pak $\alpha f \in R(\bar{\omega})$ i $f+g \in R(\bar{\omega})$ a platí:

$$\iint\limits_{\bar{\omega}} \alpha f = \alpha \iint\limits_{\bar{\omega}} f \,, \qquad \iint\limits_{\bar{\omega}} f+g = \iint\limits_{\bar{\omega}} f + \iint\limits_{\bar{\omega}} g \;;$$

b) aditivita:
$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \cup \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ měřitelné oblasti, a nechť $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2 \subset \partial\omega_1 \cup \partial\omega_2$ (tj. $\bar{\omega}_1$ a $\bar{\omega}_2$ mají „společné" jen hraniční body), pak $f \in R(\bar{\omega}_i)$, $i = 1, 2$ a platí

$$\iint\limits_{\bar{\omega}} f = \iint\limits_{\bar{\omega}_1} f + \iint\limits_{\bar{\omega}_2} f \;;$$

c) <u>uspořádání a věta o střední hodnotě</u>:

(i) $\bar{\omega}$ - měřitelná, $f \in R(\bar{\omega})$, $g \in R(\bar{\omega})$ a $f(x,y) \leqq g(x,y)$ v $\bar{\omega}$,

pak $\displaystyle\iint_{\bar{\omega}} f \leq \iint_{\bar{\omega}} g$

(speciálně - je-li $f \geqq 0$ v $\bar{\omega}$, pak $\displaystyle\iint_{\bar{\omega}} f \geqq 0$!)

(ii) $\bar{\omega}$ měřitelná, a speciálně $\alpha \leq f(x,y) \leq \beta$ v $\bar{\omega}$, pak
$(\alpha, \beta \in R)$

$$\alpha \mu(\bar{\omega}) \leq \iint_{\bar{\omega}} f \leq \beta \mu(\bar{\omega})$$

(neboť $\displaystyle\iint_{\bar{\omega}} \alpha \, dxdy = \alpha \iint_{\bar{\omega}} dxdy = \alpha \mu(\bar{\omega})$)

(a stejně pro $\displaystyle\iint \beta \, dxdy = \beta \mu(\bar{\omega})$)

(iii) a z (ii) plyne: je-li f spojitá na $\bar{\omega}$, pak existuje bod $(\xi, \eta) \in \bar{\omega}$ tak, že

$$(*) \quad f(\xi, \eta) = \frac{1}{\mu(\bar{\omega})} \iint_{\bar{\omega}} f(x,y) \, dxdy$$

($f(\xi,\eta)$ - střední hodnota veličiny f v $\bar{\omega}$)

<u>Dk.</u> (naznačení):

(i) je-li f spojitá na $\bar{\omega}$ - omezené a uzavřené, tj. kompaktní množině, pak f nabývá v $\bar{\omega}$ svých globálních extrémů, tj.

$$\left(\min_{\bar{\omega}} f = \right) m \leq f(x,y) \leq M \quad \left(= \max_{\bar{\omega}} f\right), \quad f \in R(\bar{\omega}) \text{ a}$$

a dle (ii): $\displaystyle m \cdot \mu(\bar{\omega}) \leq \iint_{\bar{\omega}} f(x,y) \, dxdy \leq M \cdot \mu(\bar{\omega})$, tj.

$$m \leq \frac{1}{\mu(\bar{\omega})} \iint_{\bar{\omega}} f(x,y) \, dxdy \leq M$$

a dále si vzpomeňme na vlastnost nabývání mezihodnot spojité funkce – „hodnota" $\frac{1}{\mu(\bar{\omega})}\iint_{\bar{\omega}} f(x,y)\,dx\,dy \in \langle m, M\rangle$,

tedy je „nabývána" v $\bar{\omega}$ – t.j. existuje $(\xi,\eta)\in\bar{\omega}$ tak, že platí $(*)$.

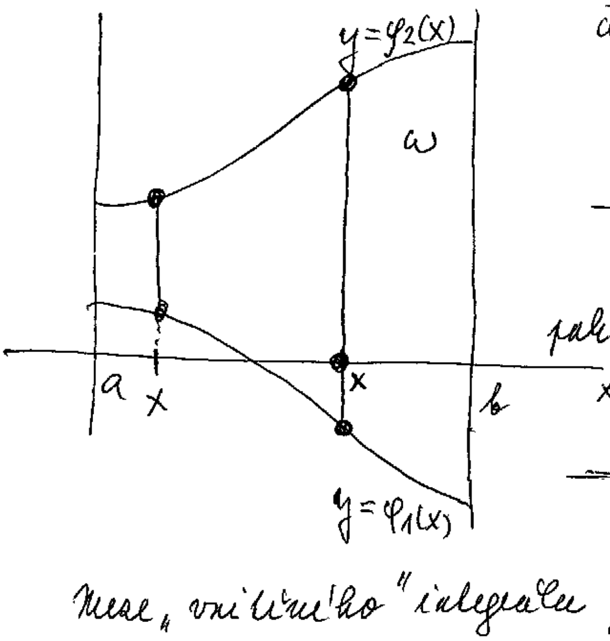
3) <u>Výpočet</u> $\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ – <u>Fubiniho věta</u>

„u nás" pro speciální „druhy" oblastí $\bar{\omega}$ (a je to vlastně „aplikace Fubiniho věty pro O a f^2")

a) <u>standardní oblast 1. typu (též měřitelná oblast 1. typu)</u>

$\bar{\omega}_1 = \{[x,y]\in R^2;\ a\le x\le b;\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, kde

$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ jsou funkce, definované na $\langle a,b\rangle$
a když $\varphi_i\in C^{(1)}(\langle a,b\rangle)$, pak hranice $\bar{\omega}_1$ je sjednocením čtyř oblouků (viz obrázek) jednoduchých (snad je nemusím zde vyjadřovat, ale zkuste si to) –



$\bar{\omega}$ je tedy měřitelná oblast (omezená s „dobrou" hranicí, tedy měřitelná).

<u>A pak Fubiniho věta „říká":</u> je-li $f\in C(\bar{\omega})$,

pak $$\iint_{\bar{\omega}_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

(početní verze věty)

Meze „vnitřního" integrálu jsou $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ – <u>závisí na proměnné x</u>!
To je „nové"!

A přesnější „znění“ Fubiniovy věty :

Je-li $f \in C(\overline{\omega}_1)$, pak

(i) pro každé $x \in \langle a,b \rangle$ existuje $\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \Phi(x)$;

(ii) funkce $\Phi(x)$ je integrovatelná v $\langle a,b \rangle$

(tj. $\Phi(x) \in R(\langle a,b \rangle)$ – zaručuje to zde nejen vlastnosti funkce, kterou integrujeme, tj. f, ale i jsou „třeba“ vhodné vlastnosti hranice $\overline{\omega}_1$, tj. vlastnosti funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ v $\langle a,b \rangle$.);

(iii) platí
$$\iint_{\overline{\omega}_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(a vše díky (i) a (ii) je ve vzorci definováno).

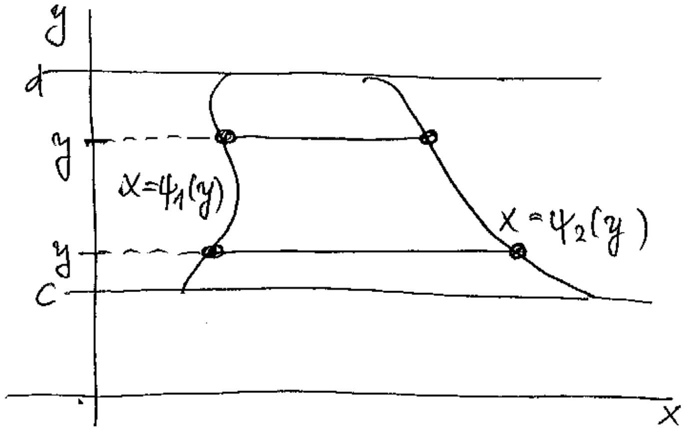
Větu (samozřejmě) dokazovat nebudeme, ale předchozí „vysvětlení“ si Fubiniho věta zaslouží.

A další modifikace znění Fubiniho věty (pro další „druhy“ $\overline{\omega}$)

b) standardní oblast 2. typu (měřitelná 2. typu)

$$\overline{\omega}_2 = \{ [x,y] \in R^2;\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y);\ c \le y \le d \}$$
$$\psi_1(y),\ \psi_2(y) \in C^{(1)}(\langle c,d \rangle)$$

Je-li $f \in C(\overline{\omega}_2)$, pak $f \in R(\overline{\omega}_2)$, neboť $\overline{\omega}_2$ je opět oblast měřitelná – je omezená a hranice $\partial \omega_2$ je opět sjednocení čtyř jednoduchých obloučků.



a platí:

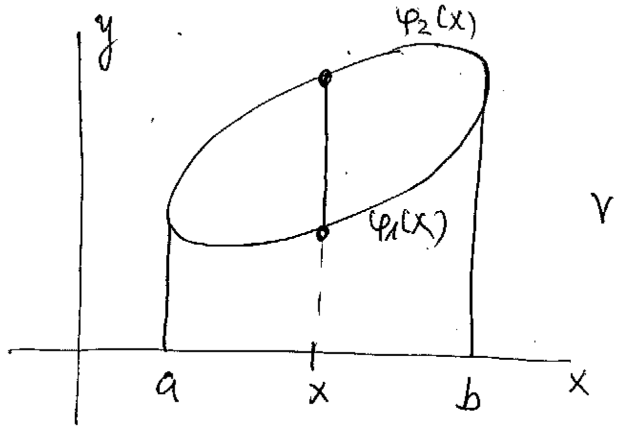
(i) pro $\forall y \in \langle c, d \rangle$ existuje

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \phi(y)$$

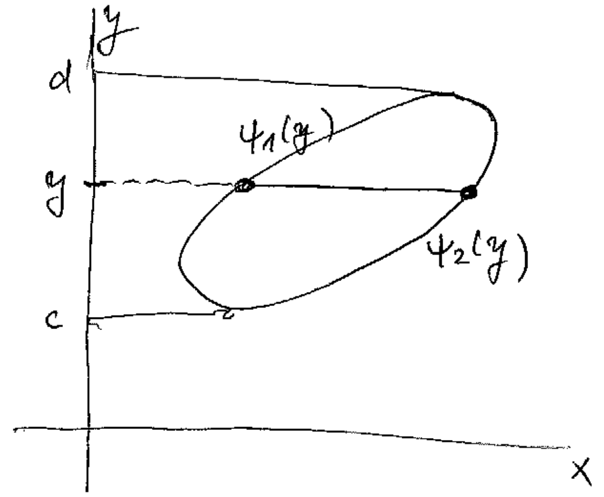
(ii) $\phi(y) \in R(\langle c, d \rangle)$

a $$\iint_{\bar{\omega}_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

c) $\bar{\omega}$ může být typu prvního nebo i druhého, pak lze si vybrat – můžeme integrovat dle a) nebo i dle b)
(ukážeme v příkladech – nejjednodušší příklad obdélník, kruh, elipsa, apod)



v



a „teoretický" příklad – neboli poznámka:

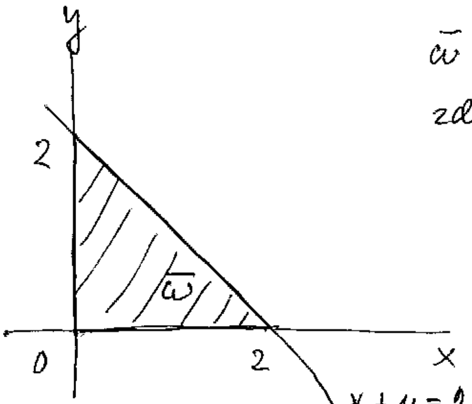
v MA1 – obsah oblasti $\bar{\omega}_1$ (z a)) – nyní $\mu(\bar{\omega}_1) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx$;

v MA2 – $\mu(\bar{\omega}_1) = \iint_{\bar{\omega}_1} dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx$ $) =!$

Příklady:

① $\iint\limits_{\bar\omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, kde $\bar\omega \subset R^2$ je omezená oblast, ohraničená přímkami $x=0,\ y=0,\ x+y=2$;

takže lze zadat $\omega \doteq \{[x,y];\ x\in\langle 0,2\rangle,\ 0\le y\le 2-x\}$
(obecně třeba zjistit „jinak")



$\bar\omega$ – je měřitelná oblast, $f(x,y)=x^2+y^2$ je zde spojitá, tedy $f\in R(\bar\omega)$ a

$$\iint\limits_{\bar\omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_0^2\left(\int_0^{2-x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

$x+y=2 \Rightarrow y=2-x$

$$= \int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{(y=)\,0}^{(y=)\,2-x}dx = \int_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx = \cdots$$

nebo integrace v „obráceném pořadí" (zde bude „stejná" díky „souměrnosti" $\bar\omega$ i f)

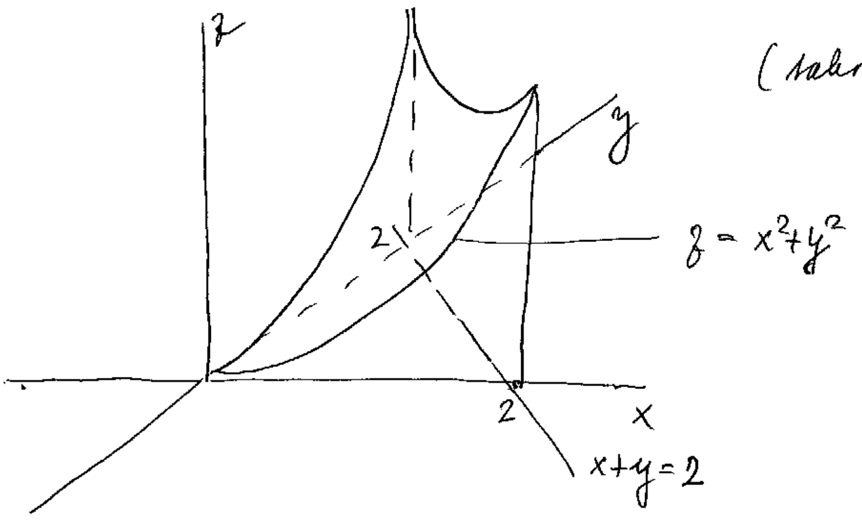
$$\iint\limits_{\bar\omega}(x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_0^2\left(\int_0^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\right)dy =$$

pro y pevné je $0\le x\le 2-y$

$$= \int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{(x=)\,0}^{(x=)\,2-y}dy = \int_0^2\left(\frac{(2-y)^3}{3}+y^2(2-y)\right)dy =$$

Jak se dá tento integrál „interpretovat"? asi vás napadne

(i) objem tělesa, které má základnu v rovině $z=0$, stěny jsou tvořeny rovinami $x=0,\ y=0,\ x+y=2$ a „střecha" je plocha – graf funkce $z=x^2+y^2$ (rotační paraboloid)
(„náčrtek" viz str. 12)

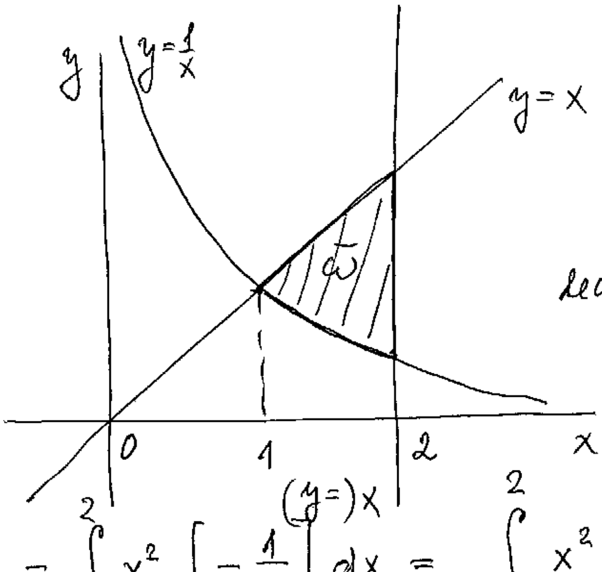


(taková „klouzačka")

(ii) a fyzikálně by integrál mohl „počítat" moment setrvačnosti trojúhelníku $\bar{\omega}$ o hustotě $\rho(x,y)=1$ (tj. homogenního) vzhledem k ose, jdoucí kolmo k $\triangle$ počátkem (tj. jedním z vrcholů)

$$J = \iint_{\bar{\omega}} (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \rho(x,y) \equiv 1 \ \text{v} \ \bar{\omega}$$

(2) (technický) $\displaystyle\iint_{\bar{\omega}} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, kde $\bar{\omega}$ je omezená oblast v R^2, ohraničená grafy funkcí $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a přímkou $x = 2$.



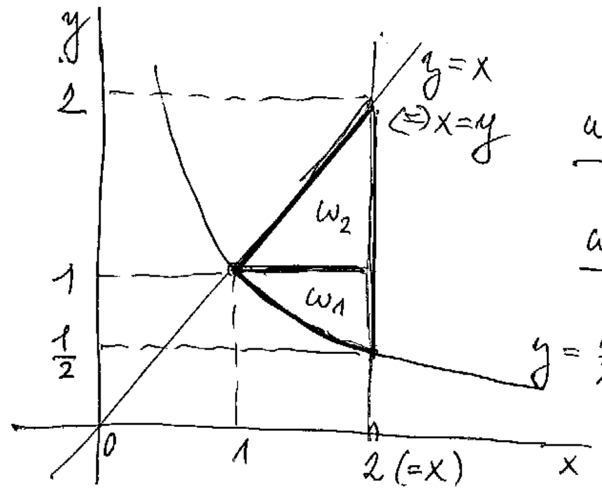
opět je „vidět", že $\bar{\omega}$ je oblast 1. typu:

$$x \in \langle 1,2 \rangle, \quad \frac{1}{x} \le y \le x$$

tedy,
$$\iint_{\bar{\omega}} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_1^2 \left(\int_{(y=)\frac{1}{x}}^{(y=)x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{(y=)\frac{1}{x}}^{(y=)x} dx = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \left(= \frac{9}{4}\right)$$

Kdybychom chtěli integrovat v obráceném pořadí, tak vidíme, že $\bar{\omega}$ nemá hranici „zleva" funkcí y – a budeme tak muset užít aditivitu integrálu – abychom si to vysvětlili, co aditivita „je" – udělejme to:



$\bar{\omega} = \omega_1 \cup \omega_2$, ω_1, ω_2 mají společné jen body hranice

$\underline{\omega_1}: \frac{1}{y} \le x < 2 \implies \frac{1}{2} \le y \ (\le 1)$

$\underline{\omega_2}: y \le x \le 2 \implies (1 \le) y \le 2$

$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$

$$\text{tj.}\quad \iint\limits_{\bar{\omega}} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_1} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy + \iint\limits_{\omega_2} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy \underset{\text{F.V.}}{=}$$

„aditivita"

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right) dy + \int_{1}^{2} \left(\int_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{y}}^{2} dy + \int_{1}^{2} \frac{1}{y^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y}^{2} dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3y^3} \right) dy + \int_{1}^{2} \frac{1}{y^2} \left(\frac{8}{3} - \frac{y^3}{3} \right) dy = \ldots\ldots$$

③ Najděte objem oblasti $\Omega \subset R^3$, omezené, která je ohraničená rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou o rovnici $y=x^2$.

Jako aplikaci dvojného integrálu jsme vytvořili návod pro výpočet objemu oblasti $\Omega \subset R^3$, kde

$$\Omega = \{[x,y,z];\ (x,y)\in\omega,\ 0 \le z \le f(x,y)\},$$

kde ω – měřitelná oblast v R^2, $f \in C(\omega)$.

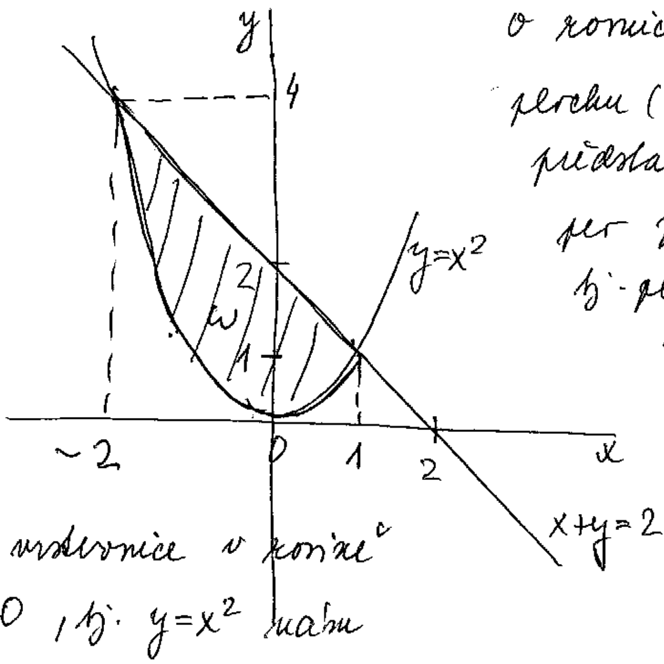
V tomto příkladu je tedy třeba najít
1) $f(x,y)$ a 2) $\omega \subset R^2$

1) $z=0$ – je dáno, z rovnice $x+y+z=2 \Rightarrow z = 2-x-y$

a Ω by měla být „mezi" $z=0$ a $z=2-x-y$, tj.

2) $0 \le z \le 2-x-y \Rightarrow x+y \le 2$ neboli $y \le 2-x$

– tato je ale v rovině oblast neomezená (pod přímkou) – potřebujeme ještě využít toho, že oblast Ω je omezená plochou o rovnici $y=x^2$ – jak si máme tuto plochu (a obecně plochu o rovnici $y=f(x)$?) představit? Zkusíme „vrstevnice" – pro $z=k$ je vrstevnice stále $y=x^2$, tj. plocha vzniká tak, že „jedeme" s parabolou $y=x^2$ podél osy z oběma směry (nahoru, dolů) – takové ploše se říká válcová plocha – klasická válcová" vznikne, „pojedeme-li" s kružnicí $x^2+y^2=r^2$ ve směru osy z.



a vrstevnice v rovině $z=0$, tj. $y=x^2$ nám už ω uzavře!

Tedy, $\omega = \{[x,y];\ x \in \langle -2,1\rangle,\ x^2 \leqq y \leqq 2-x\}$

neboť průsečíky paraboly $y=x^2$ a přímky $y=2-x$ snadno najdeme – musí platit, že průsečíky mají x-ovou souřadnici, pro kterou je $x^2 = 2-x$, a tedy řešíme kvadratickou rovnici $x^2+x-2=0 \iff x_1=-2,\ x_2=1$.

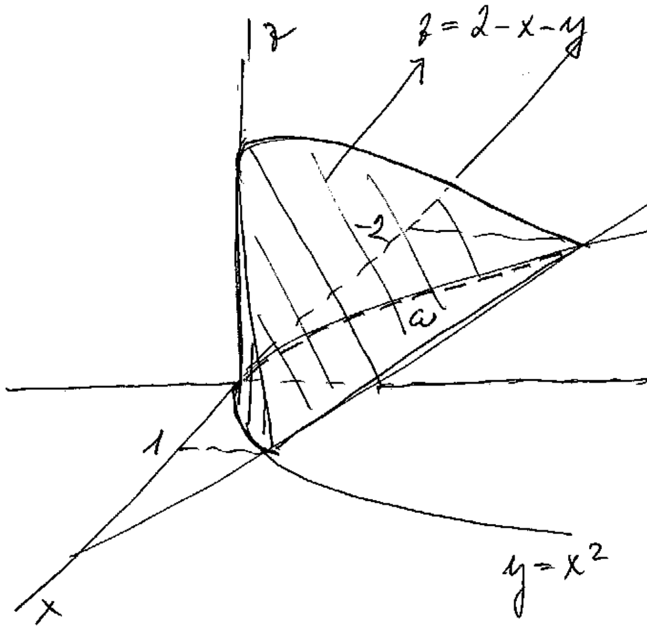
Tedy: (*) $$V(\Omega) = \iint_\omega (2-x-y)\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x}(2-x-y)\,dy\right)dx =$$

(užili jsme F.V. pro oblast ω 1. typu)

$$= \int_{-2}^{1}\left[(2-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{(y=)x^2}^{(y=)2-x} dx = \int_{-2}^{1}(2-x)^2 - \frac{(2-x)^2}{2} - \left[(2-x)x^2 - \frac{x^4}{2}\right]dx =$$

$= \dots$ atd. (dle „dohody" nedopočítávám)

A nemá se povede „náčrtek" Ω



A poznámka: Integrál (*) by se dal integrovat dle Fubiniho věty i „obráceně" ale myslím, že vidíte, že tato integrace bude „horší" opět se bude muset použít aditivita integrálu a navíc, budou i „nehezké" meze.

(pro $0 \leqq y \leqq 1$ bude $-\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}$,
a pro $1 \leqq y \leqq 4$ bude $-\sqrt{y} \leqq x \leqq 2-y$)

(4) Máme určit opět $V(\Omega)$, kde Ω je omezená oblast, $\Omega \subset R^3$, která je ohraničená rovinou $z=0$ a plochami $z = 4-y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$.

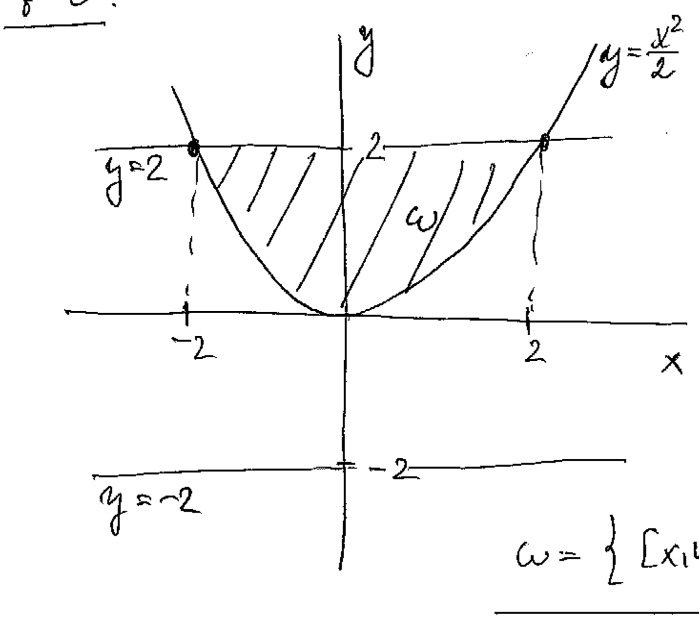
Už víme (je zde ohraničení rovinou $z=0$), že

$$V(\Omega) = \iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$$ — a musíme „najít" f a ω!

(i) $f(x,y)$: asi $\underline{z = 4-y^2}$ (nezávisí na x, i tak toto chápeme jako funkci dvou proměnných, a graf – vidíme – je opět „válcová" plocha – „jede" parabola $z = 4-y^2$ ve směru osy x (pro každé x-pevné je řez „grafem" stále parabola $z = 4-y^2$) – tato plocha je jakoby „strop" tunelu, jehož základna je rovina $z=0$;

(ii) $\underline{z=0 \text{ a } z=4-y^2 \text{ se protnou pro } y^2=4, \text{ tj. } y=\pm 2}$

$\underline{z=0}$:

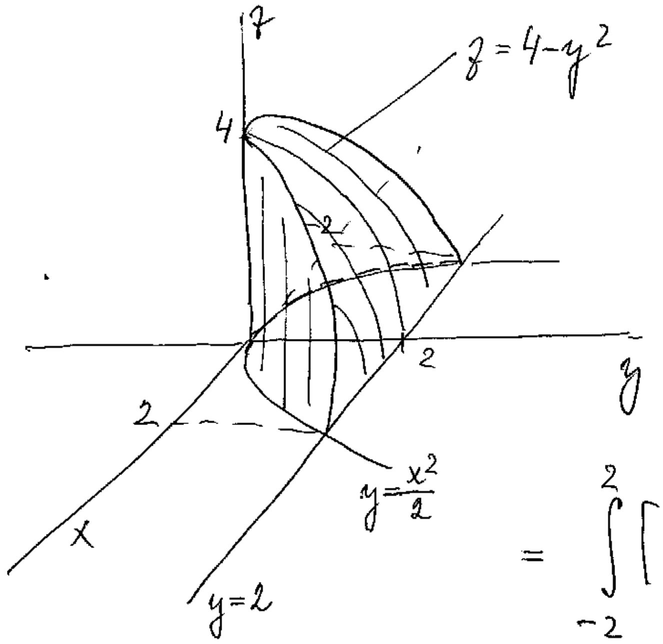


a nyní se „přidá" známá (již) válcová plocha $y = \frac{x^2}{2}$ – „stopa" v rovině $z=0$ je $y = \frac{x^2}{2}$ a $\frac{x^2}{2} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\longrightarrow$ a máme oblast ω!

$$\underline{\omega = \left\{ [x,y];\ x \in \langle -2,2 \rangle,\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2 \right\}}$$

a) pokus o náčrtek oblasti Ω



b) výpočet $V(\Omega)$:

$$V(\Omega) = \iint_{\omega} (4-y^2)\,dx\,dy \underset{\text{F.V.}}{=}$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{2} (4-y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{(y=)\frac{x^2}{2}}^{(y=)2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(2x^2 - \frac{x^6}{24}\right) \right] dx = \ldots\ldots$$

(mně „vyšlo" $\frac{2 \cdot 128}{21} = V$)

Poznámka ke značení dvojnásobného integrálu – „zjednodušení" zápisu:
(budeme dále používat)

Máme-li po užití Fubiniho věty (např. pro ω 1. typu)

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad , \text{ píše se často}$$

dvojný integrál ve tvaru $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ – „zmenší"

se tak počet závorek a zápis je
asi přehlednější – budu to též často dále psát
(pokud by to někomu vadilo, pište, jako dříve, ale snad stručnějšímu
zápisu lze rozumět)

A dnes již poslední příklad jako inspirace pro první část příští přednášky – snad dnes už máte dost nových „věcí" na přemýšlení:

(5) $I = \iint\limits_{\omega} (x^2+y^2)\,dxdy$, kde $\omega = \{ [x,y];\ x^2+y^2 \leqq R^2, R>0 \}$

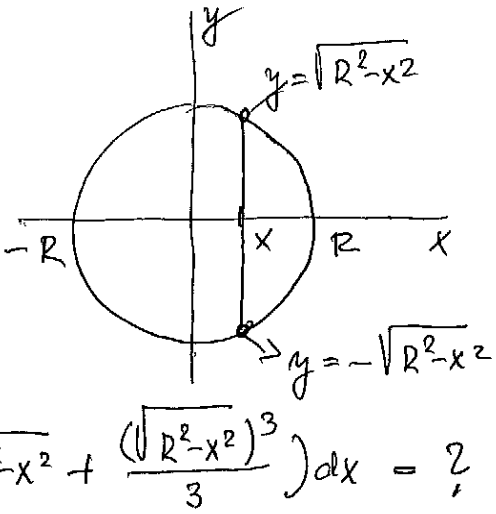
(tj. integrační obor je kruh o středu v $[0,0]$ a poloměru R)

interpretace: (možné) 1) objem tělesa, stojícího v rovině $z=0$; ohraničeného válcovou plochou $x^2+y^2=R^2$ a shora rotačním paraboloidem $z=x^2+y^2$ (takový „válcový podstavec" pod parabolické zrcadlo);

2) hmotnost kruhové desky s plošnou hustotou $\rho(x,y) = x^2+y^2$;

3) moment setrvačnosti homogenní kruhové desky vzhledem ke středu kruhu

výpočet: v kartézských souřadnicích:



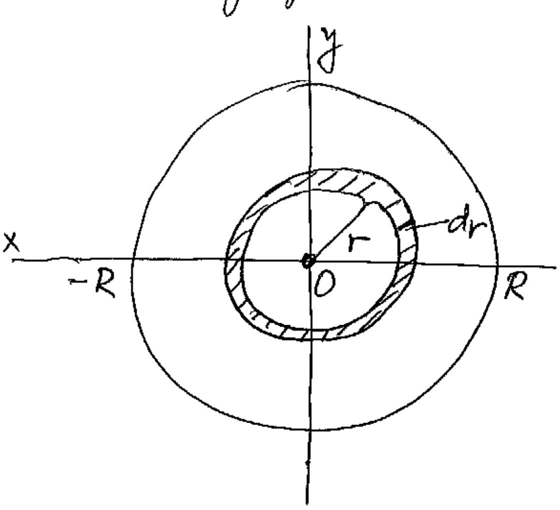
$$I \underset{F.V.}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = 4 \int_0^R \left(x^2\sqrt{R^2-x^2} + \frac{(\sqrt{R^2-x^2})^3}{3} \right) dx = ?$$

(díky sudosti funkce) – toto tedy není „pěkný" integrál – a přitom úloha se nezdá tak obtížná – proč?

„Nehezký" integrál se získal asi proto, že jsme kruh popsali „pomocí kartézských souřadnic – a ty s „kulatými" oblastmi moc „nejdou" dohromady :

Kdybychom ve fyzice počítali daný integrál jako „hmotnost" (tj. interpretace 2), tak bychom to, jak máme integrovat, asi vymysleli : – v kruhu všude ve vzdálenosti $r>0$ od středu je stále stejná hustota, tedy lze „rozdělit" kruh na „prstýnky o poloměru r a šířce dr („tenké") a hmotnost prstýnku bude asi (ρ na prstýnku o poloměru r je $\rho(x,y)=x^2+y^2=r^2$!



$$dm = r^2 \cdot 2\pi r\,dr$$ (délka prstýnku" · „šířka")

a pak $$m = \int_0^R dm = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi r^4}{2}$$

– a tato „fyzikální" úvaha vede ke správnému výsledku –

– a dost jednoduchou cestou – co se za tímto postupem skrývá ? Volba „jiných" souřadnic v rovině –

– když jedna souřadnice je $r>0$ (vzdálenost bodu roviny od počátku, tak „druhá" bude úhel φ – a jsme „v" polárních souřadnicích – a transformací kartézských souřadnic do polárních ve dvojném integrálu začneme příští přednášku.