MA2 – „písemná“ přednáška 1.4.2020

1. Jako „rozcvička“ ještě příklad na derivování složených funkcí (školní) – ukázka toho, že použití „řetízku“ může být při derivování složené funkce i jednodušší výpočet, nebo aspoň ne složitější (jak to v minulé „přednášce“ asi vypadalo)

$f(x,y) = x^y$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = t^2$ (tj. vektorově $\vec{\varphi}(t) = (\sin t, t^2)$)

$\mathcal{D}f = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 ; x > 0 \} = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$

$\mathcal{D}\vec{\varphi} = \mathbb{R}$

a složenou funkci $g(t) = f(\vec{\varphi}(t)) = (\sin t)^{t^2}$ budeme „uvažovat“ v $(0,\pi) \subset \mathcal{D}g$

a derivace funkce $g(t)$:

„přímo“: $g'(t) = \left(e^{t^2 \ln(\sin t)}\right)' = e^{t^2 \ln(\sin t)} \left(2t \ln(\sin t) + t^2 \frac{\cos t}{\sin t} \right)$,

$t \in (0,\pi)$.

a „řetízkem“:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

a zde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$, $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = 2t$,

tedy: $g'(t) = t^2 (\sin t)^{t^2-1} \cos t + (\sin t)^{t^2} \ln(\sin t) \cdot 2t$, $t \in (0,\pi)$

(a docela jednoduché!)

2. <u>Základní pojmy a „poznatky" z diferenciálního počtu vektorových funkcí více proměnných</u>, tj. funkcí
<u>$\vec{f}: M \subset R^n \longrightarrow R^m$</u>, neboli

$$\vec{f}(x_1, .., x_n) = (f_1(x_1, .., x_n), f_2(x_1, .., x_n), ..., f_m(x_1, .., x_n))$$

(stručněji: $\vec{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), .., f_m(X))$, $X = (x_1, x_2, .., x_n)$)

Výsledky „zde" dostaneme „spojením" toho, co dosud víme o vektorových funkcích jedné proměnné (viz přednáška 18.3.) a o reálných funkcích více proměnných (přednášky „další"). Už víme, že limita v R^n se „přenáší" na složky, tak snad bude dále vše „jasné" (nebudeme vše zbytečně složitě rozebírat), definice zůstávají „stejné":

1) $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} \vec{f}(X) = \vec{L}$, $\vec{L} = (L_1, L_2, .. L_m) \iff \lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f_i(X) = L_i$, $i = 1, 2, .. m$

tj. $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} \vec{f}(X) = \left(\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f_1(X), ..., \lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f_m(X)\right)$ $(X_0 \in M')$

2) <u>spojitost funkce $\vec{f}$</u> v bodě $X_0 \in M \cap M'$ (spec. $X_0 \in M^0$)

funkce $\vec{f}$, definovaná v $U(X_0)$ (obecněji $X_0 \in M \cap M'$) je v bodě X_0 spojitá, když $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$ (obecněji $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in M}} f(X) = f(X_0)$, což je ekvivalentní s tím, že funkce (reálné) $f_i(X)$ jsou spojité v bodě X_0, $i = 1, 2, .., m$ (obecněji $f_i(X)$ jsou spojité v X_0 vzhledem k M)

3. <u>Parciální derivace</u> funkce $\vec{f}$ v bodě $X_0 \in M^0$ je definována (stejně)

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(X_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(X_0+\vec{h}) - \vec{f}(X_0)}{h}, \quad \vec{h} = (0,..,0,\overset{i}{h},0,..,0),$$

$i = 1, 2, .. n$,

tedy (z vlastnosti „limity" vektorové funkce – viz 1) je

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(X_0), .., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0)\right), \quad i = 1, 2, .., n.$$

4) <u>diferencovatelnost (a totální diferenciál) funkce $\vec{f}(X)$ v bodě X_0</u>

<u>zkusme</u> (pokus – méně „vědecký" přístup, pro zájemce bude časem v příloze přístup „matematicky přesný", zatím to vždy „vycházelo")

co kdyby (?) (*) $d\vec{f}(X_0) = (df_1(X_0), df_2(X_0), .., df_m(X_0))$?

Co by měl (podle „dřívějších" diferenciálů) takto definovaný $d\vec{f}(X_0)$ splňoval ?

(i) $d\vec{f}(X_0)$ by mělo být lineární zobrazení z R^n do R^m,
tj. $d\vec{f}(X_0)(dX) = A \cdot dX$, kde A je matice typu (m,n)
(viz LA)

(ii) $d\vec{f}(X_0)$ by měl být „lineární aproximací" diference funkce $\vec{f}$ v okolí bodu X_0, tj. mělo by platit:

$$f(X) - f(X_0) = d\vec{f}(X_0)(X - X_0) + \vec{\omega}(X - X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\vec{\omega}(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = \vec{o}.$$

Jak zkusme dále ověřit, zda (i) a (ii) při $df(X_0)$, definovaném v (*), platí.

(i) $d\vec{f}(X_0)$ je lineární zobrazení z R^n do R^m:

$$d\vec{f}(X_0) = \begin{pmatrix} df_1(X_0) \\ df_2(X_0) \\ \dots \\ df_m(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0)dx_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0)dx_n \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0)dx_n \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}}$$

tuto matici parciálních derivací nazýváme Jacobiho maticí funkce $\vec{f}$ v X_0 a značíme $J_{\vec{f}}(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)_{\substack{i=1,2,..m \\ j=1,2,..n}}$

vektor přírůstků, dále značíme dX

Pak lze napsat, že

$$d\vec{f}(X_0)(dX) = J_{\vec{f}}(X_0) \cdot dX \quad ,$$

tedy $d\vec{f}(X_0)(dX)$ (z (*)) je lineární zobrazení R^n do R^m

(ii) ? a jaká je „chyba" $\vec{\omega}(X - X_0)$ v lineární aproximaci v (ii), tj. platí $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\vec{\omega}(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$??

V našem „pokusu" s $d\vec{f}(X_0)$ (viz (*)) jsme předpokládali, že každá složka funkce $\vec{f}(X)$, tj. $f_i(X)$ je diferencovatelná v X_0, ($i=1,2,\dots,m$), tj. že platí

$$f_i(X) - f_i(X_0) = df_i(X_0)(X-X_0) + \omega_i(X-X_0), \text{ kde}$$
$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega_i(X-X_0)}{\|X-X_0\|} = 0, \quad i=1,2,\dots,m \qquad (**)$$

A nyní zkusme:

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\vec{\omega}(X-X_0)}{\|X-X_0\|} = \lim_{X \to X_0} \frac{\vec{f}(X) - \vec{f}(X_0) - J_{\vec{f}}(X_0)\cdot(X-X_0)}{\|X-X_0\|} =$$

$$= \lim_{X \to X_0} \frac{1}{\|X-X_0\|} \begin{pmatrix} f_1(X) - f_1(X_0) - \nabla f_1(X_0)(X-X_0) \\ \cdots \\ f_m(X) - f_m(X_0) - \nabla f_m(X_0)(X-X_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{X \to X_0} \frac{1}{\|X-X_0\|} \begin{pmatrix} \omega_1(X-X_0) \\ \cdots \\ \omega_m(X-X_0) \end{pmatrix} = \lim_{X \to X_0} \begin{pmatrix} \frac{\omega_1(X-X_0)}{\|X-X_0\|} \\ \cdots \\ \frac{\omega_m(X-X_0)}{\|X-X_0\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(„limitíme" po složkách, a víme, že (**) platí pro všechna $i=1,2,\dots,m$)

<u>A to jsme chtěli! Tedy, „důkaz" je hotov, $d\vec{f}(X_0)$ jsme „odhadli" správně!</u>

A uvidíme ještě dále, jak Jacobiho matice $J_{\vec{f}}(X)$ je „užitečná" při derivování funkcí složených!

5) Derivace vektorové funkce ve směru (vektoru $\vec{a}$, $\|\vec{a}\| = 1$)

Nechť funkce $\vec{f}: M \subset R^n \to R^m$ je diferencovatelná v bodě $X_0 \in M^0$; pak (už stručně)

$$\frac{d\vec{f}}{d\vec{a}}(X_0) = \frac{d\vec{f}(X_0 + t\vec{a})}{dt}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\vec{a}}(X_0) \\ \cdots \\ \frac{df_m}{d\vec{a}}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0) \circ \vec{a} \\ \cdots \\ \nabla f_m(X_0) \circ \vec{a} \end{pmatrix} = J_{\vec{f}}(X_0) \cdot \vec{a},$$

neboť Jacobiho matici lze zapsat i „pomocí" gradientů:

$$J_{\vec{f}}(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0) \\ \cdots \\ \nabla f_m(X_0) \end{pmatrix}.$$

6) derivace složené vektorové funkce více proměnných

nechť:

(i) $\vec{\varphi}(t): \mathcal{I} = (a,b) \to R^n, X = \vec{\varphi}(t) \in M$ pro $t \in \mathcal{I}$, ex. $\vec{\varphi}'(t)$ v $\mathcal{I}$;

a $\vec{f}(X): M \subset R^n \to R^m$, $\vec{f}$ je diferencovatelná v bodě $X \in M^0$;

pak

$$\frac{d}{dt}\vec{f}(\vec{\varphi}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} f_1(\vec{\varphi}(t)) \\ \frac{d}{dt} f_2(\vec{\varphi}(t)) \\ \cdots \\ \frac{d}{dt} f_m(\vec{\varphi}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\varphi}(t)) \circ \vec{\varphi}'(t) \\ \nabla f_2(\vec{\varphi}(t)) \circ \vec{\varphi}'(t) \\ \cdots \\ \nabla f_m(\vec{\varphi}(t)) \circ \vec{\varphi}'(t) \end{pmatrix}, \text{ tedy,}$$

$(\vec{\varphi}(t) = X)$

$$\underline{\frac{d}{dt}\vec{f}(\vec{\varphi}(t)) = J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t), \quad t \in \mathcal{I}}$$

(a opět – derivace složené funkce = „(derivace vnější) . (derivace vnitřní)")

(ii) $\vec{\varphi}(X) : M_1 \subset R^n \to R^k$, $\vec{\varphi}(X) \in M_2$ pro $X \in M_1$, ex. $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)$ v M_1;

$\vec{f}(Y) : M_2 \subset R^k \to R^m$, $\vec{f}$ je diferencovatelná v bodem z M_2 (tj. body z M_2 jsou vnitřní body).

Pak, označíme-li $\vec{g}(X) = \vec{f}(\vec{\varphi}(X))$, $X \in M_1$, existuje také (body $X \in M_1$ jsou vnitřní body M_1)

$$\frac{d\vec{g}}{\partial x_i}(X) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{f}(\vec{\varphi}(X))\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_1(\vec{\varphi}(X))\right) \\ \text{---} \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_m(\vec{\varphi}(X))\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X) \\ \text{---} \\ \nabla f_m(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X) \end{pmatrix}$$

tedy, $$\underline{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vec{f}(\vec{\varphi}(X))\right) = J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(X)) \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)}$$

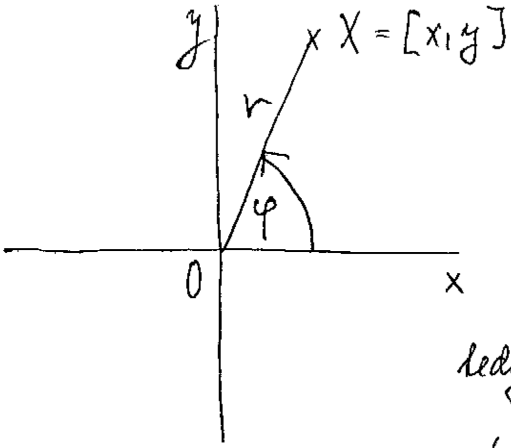
(tedy „opět" – „derivace" funkce vnější, tj. $J_{\vec{f}}(\vec{\varphi}(X)) \cdot$ „derivace" funkce vnitřní, tj. $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x_i}(X)$)

Ještě speciálně „hezké" vektorové funkce jsou $\vec{f} : M \subset R^n \to R^n$ (tj. $m = n$, často se nazývají „vektorová pole").

Je-li Jacobiho matice $J_{\vec{f}}(X)$ matice regulární pro $X \in M \subset R^n$, pak $\vec{f} : M \subset R^n \to R^n$ se nazývá regulární zobrazení. A dá se ukázat, že pokud $\vec{f}$ je je prosté zobrazení množiny $M \subset R^n$ na $f(M) \subset R^n$ a regulární, pak existující inverzní zobrazení (inverzní vektorová funkce $\vec{f}^{(-1)}$) je též zobrazení regulární (na $f(M)$).

A podívejme se teď „pohledem" vektorových funkcí více proměnných na transformaci souřadnic kartézských v R^2 na souřadnice „polární" (příklad z minulé přednášky – užití derivace složené funkce pro transformaci diferenciálního operátoru) –
– je to příklad vektorového zobrazení $R^2 \to R^2$

$X \in R^2$: $X = (x, y)$ – kartézské souřadnice bodu X



pro $X \neq 0$ je

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad r \in (0, +\infty),\ \varphi \in \langle 0, 2\pi);$$

tedy máme zobrazení

$$\underset{\in (0,+\infty)\times\langle 0,2\pi)}{(r,\varphi)} \xrightarrow{\vec{\Phi}} (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in R^2 \setminus \{[0,0]\};$$

Lze tedy napsat: $\underline{\vec{\Phi}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)}$,

kde $\vec{\Phi}(r,\varphi) : (0,+\infty)\times\langle 0,2\pi) \to R^2 \setminus \{[0,0]\}$

a $$J_{\vec{\Phi}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\det J_{\vec{\Phi}}(r,\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0,$$

tedy, zobrazení $\vec{\Phi}$ je regulární zobrazení na $(0,+\infty)\times\langle 0,2\pi)$

V minulé přednášce jsme „transformovali" (jako cvičení na výpočet parciálních derivací složené funkce, tj. na „řetízkové pravidlo") diferenciální operátor $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$, kde $f = f(x, y)$.