MA2 – "písemná" "přednáška" „za" 25.3. 2020

Na konci minulé „přednášky" jsme si připomněli důležité a užitečné důsledky existence $f'(a) \in R$ funkce $f: U(a) \subset R \to R$.

Existuje-li $f'(a) \in R$, pak

1) funkce f je spojitá v bodě $\underline{a}$;

2) graf funkce f „má" v bodě $[a, f(a)]$ tečnu, jejíž rovnice je $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, což je „zviditelnění" "nepřesnosti náhrady" hodnot $f(x)$ jednoduchou funkcí lineární" – tzv. lineární aproximaci, tj.

3) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$, kde $\lim\limits_{x \to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$

(tj. $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$ s chybou „řádově menší" než je $(x-a)$)

1) Příklad na „konci" minulé přednášky ukázal, že i když má funkce více proměnných všechny parciální derivace vlastní, (příklad $n=2$), nemusí být spojitá.

2) A analogie tečny ke grafu funkce jedné proměnné?

Zkusme si představit toto pro $n=2$ – pak grafem „rozumné" (tj. spojité) funkce dvou proměnných $f(x,y)$, definované na „rozumné" množině v rovině, je plocha v trojrozměrném (našem) světě, a analogie tečny ke grafu fce jedné proměnné zde je „asi" tečná rovina ke grafu v bodě $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ (f je definována aspoň v $U((a_1, a_2))$)

Pokud bude mít graf v bodě $[a_1,a_2,f(a_1,a_2)]$ tečnou rovinu (co je tečná rovina je třeba upřesnit!), tak v této rovině určitě budou ležet i tečny k řezům grafu pro $x=a_1$, resp. $y=a_2$ (viz definice parciálních derivací) a tedy budeme mít bod $A[a_1,a_2,f(a_1,a_2)]$ a dva vektory, ležící v rovině, tedy už „umíme" vyrobit rovnici roviny:

1) f je def. v množině $\omega \subset R^2$;
 $[a_1,a_2] \in \omega$ je vnitřní bod ω

2) ex. $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \in R$, tj. vektorová funkce (popisující „řez" grafu rovinou $y=a_2$) $\vec{g}(x)=(x,a_2,f(x,a_2))$ má v bodě $x=a_1$ derivaci $\vec{g}'(a_1)=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right)$ – – a to je tečný vektor k této „trajektorii" (křivce)

3) ex. $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \in R$, pak vektorová funkce (popisující „řez" grafu rovinou $x=a_1$) $\vec{h}(y)=(a_1,y,f(a_1,y))$ má v bodě $y=a_2$ derivaci $\vec{h}'(a_2)=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)$

a tedy máme bod roviny (1), a dva vektory této roviny (2,3) – – a rovnici roviny už snadno sestavíme:

bod $X=(x,y,z)$ bude bodem roviny, určené bodem A a vektory $\vec{g}'(a_1)$, $\vec{h}'(a_2)$, když vektory (a právě když) $X-A$, $\vec{g}'(a_1)$, $\vec{h}'(a_2)$ budou lineárně závislé, tj:
(viz LA)

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_1, & y-a_2, & z-f(a_1,a_2) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$ (výpočet determinantu – viz LA)

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_1) + z - f(a_1,a_2) = 0,$$

tj: $$z = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2) \quad (*)$$

A nyní otázka: kdy lze považovat rovinu o rovnici (*) za tečnou rovinu ke grafu fce f v bodě $[a_1,a_2,f(a_1,a_2)]$?

Odpověď: Když bude vzdálenost "mezi grafem funkce a rovinou „dostatečně" malá (jako u funkce jedné proměnné – vzdálenost mezi bod grafu a tečny pro stejné „x"): pro (x,y) blízké bodu (a_1,a_2).

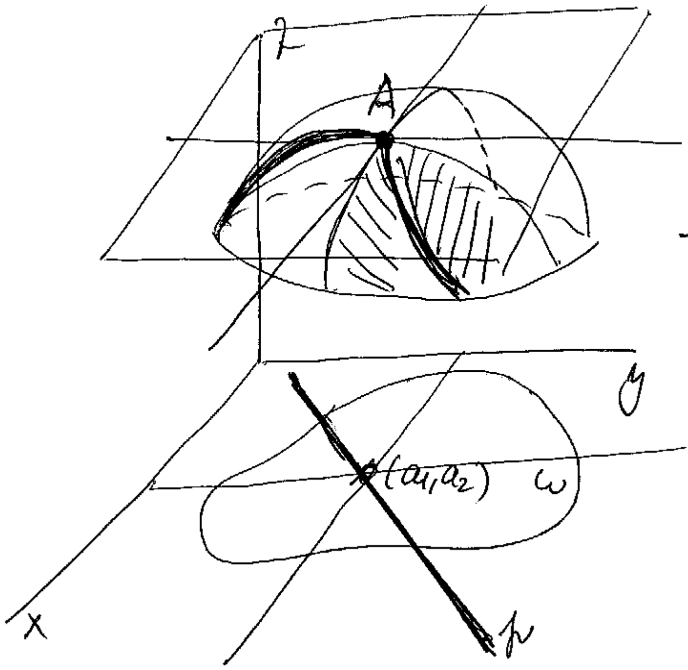
Tedy zde: označme (analogicky k $n=1$)

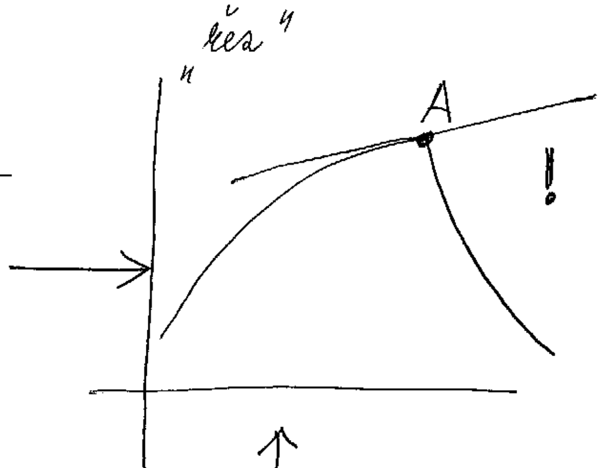
$$\omega(x-a_1, y-a_2) = f(x,y) - \left(f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)\right),$$

pak $$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{\omega(x-a_1,y-a_2)}{\|(x-a_1,y-a_2)\|} = 0$$ by mělo platit! (**)

Funkce, mající parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)$, pro kterou platí (**), se nazývá diferencovatelná v bodě (a_1,a_2) a výraz $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)$ se nazývá totální diferenciál funkce f v bodě (a_1,a_2) a značí $df(a_1,a_2)(x-a_1,y-a_2)$, krátce jen $df(a_1,a_2)$.

a platí obrázek, že rovina, která je dána bodem grafu fce $f(x,y)$ a tečnými vektory k řezům ve směru os, nemusí být tečnou rovinou (dle „našich" představ)





a řez grafem rovinou, kolmou k rovině $z=0$, jejíž stopa je přímka p, může být takto! (tak je vidět, že rovina, určená bodem A a tečnami ve směru os, není tečná rovina!

a příklad: (pro zájemce):

$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$; $D_f = R^2$,

$(a_1,a_2) = (0,0)$: $f(0,y)=f(x,0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, tedy rovina z (*) je $z=0$.

Ale pro $x=y$ je „řez" $f(x,x)=\sqrt{x^2}=|x|$ –

(pro $y=kx$ obecněji $f(x,kx)=\sqrt{|k|}\cdot|x|$), takže rovina $z=0$ nemůže být „tečná" rovina ke grafu fce f !

Poznámka ke značení:

V definici diferencovatelné funkce se spíše pro „pevný" bod užívá značení $X_0 = (x_0, y_0)$ (pro $n=2$) místo našeho (a_1, a_2) (a $X = (x, y)$) – dále to tak budeme psát, tj. ke napsat jako:

Definice: f je diferencovatelná v bodě $X_0 = (x_0, y_0)$, když platí:

$$f(X) = f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)(y - y_0) + \omega(x - x_0, y - y_0),$$

a kde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\omega(x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$ (nebo $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$)

A vraťme se ještě k příkladu funkce – zde je důkaz toho, co se zdálo!

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$; $(x_0, y_0) = (0,0)$ – zkusme, co udělá „chyba" $\omega(x,y)$!

$(\omega(x-0, y-0) =)\ \omega(x,y) = \sqrt{|xy|}$ (neboť $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ i $f(0,0) = 0$)

a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\omega(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}$ – ale taková limita neexistuje

podobný příklad jsme si ukázali u limit!

označme-li $M_1 : y = x$ pak $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2}{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

limity vzhledem k podmnožinám M_1, M_2 $\neq$!

$M_2 : x = 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ a\ x=0}} \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

Tedy limita neexistuje, tedy f není diferencovatelná v $(0,0)$!

A zobecnění pojmu diferencovatelnosti funkce a totálního diferenciálu funkce – pro n proměnných $(n>1)$:

Mějme funkci $f: M\subset R^n \to R$, X_0 nechť je vnitřní bod M;

Definice: Nechť existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i=1,2,\dots,n$ (vlastní). Říkáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě X_0 (nebo, že f má v bodě X_0 totální diferenciál), když platí:

$$(*)\quad f(X)-f(X_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2-x_2^0)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n-x_n^0)+$$

$$+\ \omega(x_1-x_1^0, x_2-x_2^0,\dots,x_n-x_n^0)\ ,\ \text{kde}$$

$$\lim_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\to\\ \to(x_1^0,\dots,x_n^0)}}\frac{\omega(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,\dots,x_n-x_n^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}}=0$$

„stručněji" $\left(X=(x_1,x_2,\dots,x_n),\ X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\right)$

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\omega(X-X_0)}{\|X-X_0\|}=0 \qquad \left(X-X_0=(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,\dots,x_n-x_n^0)\right)$$

A ještě „lepší" a užitečný (nejčastější) zápis:

Výraz v $(*)$ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2-x_2^0)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n-x_n^0)$

lze napsat ve tvaru skalárního součinu vektorů

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)\cdot\left(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,\dots,x_n-x_n^0\right)$$

a vektor parciálních derivací je užitečný "vektor nejen v matematice a nazývá se gradient funkce f (v bodě X_0) a značí $\nabla f(X_0)$, nebo $\operatorname{grad} f(X_0)$, tj.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right) = \nabla f(X_0)$$

a pak můžeme (*) zapsat:

f je diferencovatelná v bodě X_0, když platí:

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \circ (X - X_0) + \omega(X - X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$$

a $\quad \underline{df(X_0) = \nabla f(X_0) . (X - X_0)}$ – totální diferenciál

často se značí vektor $X - X_0 = dX$ $(= (dx_1, dx_2, \dots, dx_n))$,

pak $\quad \underline{df(X_0) = \nabla f(X_0) \circ dX}$

Všimněte si analogie s diferenciálem funkce jedné proměnné, kterou díky „zápisu" (tj. zavedení „šikovného značení") můžeme vidět:

$\underline{ZS}$: $df(x_0) = f'(x_0)dx \longrightarrow \underline{LS}$: $df(X_0) = \nabla f(X_0) . dX$

(tj. $f'(x_0)$ u fce jedné proměnné je „nahrazena" $\nabla f(X_0)$ (tj. všechny parciální derivace „ve vektoru"))

$\underline{\nabla f(X_0)}$ – velmi důležitý vektor i v aplikacích !

A dále – jak se „pozná", že funkce je diferencovatelná v bodě X_0?

(to je hodně důležité vědět, neboť z diferencovatelnosti funkce plyne mnoho užitečného – uvidíme dále)

Ukázat to z definice diferencovatelnosti je zpravidla hodně obtížné – vyžaduje to kromě vypočtu parciálních derivací fce i vypočet (a ukázat, že je nulová) hodně „obtížné" limity

tj. $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\omega(X-X_0)}{\|X-X_0\|}$!

Ale je jednodušší kriterium: (uvedeme bez důkazu, důkaz si můžete přečíst v doporučené literatuře či „jinde")

Věta: Nechť fce $f: M \subset R^n \to R$ má v bodě X_0 spojité všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, 2, .., n$. Pak f je diferencovatelná v bodě X_0.

Aspoň trochu vysvětlené místo důkazu (představme si pro $n=2$ – tj. funkci dvou proměnných):
Jsou-li $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě X_0, pak se při malém „kroku" z bodu X_0 (v Df) jen málo změní hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, tj. rovina, která je vytvořena z bodu na grafu a příslušných tečen v tomto bodě (jejich směrnice $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ se jen „málo" změní), se díky spojitosti směrnic tečen jen „málo zhoupne" – při kroku do bodu blízkého bodu X_0 – tedy na grafu nemohou být hrany a nebo zlomy blízko bodu $[X_0, f(X_0)]$, „kopec", tj. graf je hladký a rovina bude rovinou, která je tečná rovina ke grafu.

A „u nás": většinou je „vše" spojité, tedy naše funkce budou i diferencovatelné (až „na výjimky)

<u>A první důležitý důsledek</u> :

<u>Věta</u>: f je diferencovatelná v bodě X_0 $\Rightarrow$ f je spojitá v X_0.

Tedy odtud plyne – funkce nemůže být diferencovatelná v bodě, kde není spojitá.

<u>Důkaz („lehký")</u> :

Máme ukázat, že je-li funkce f diferencovatelná v X_0, pak $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$ (definice spojitosti f v X_0)

$$\Longleftrightarrow \lim_{X\to X_0} (f(X)-f(X_0)) = 0 \; :$$

Ale :
$$\lim_{X\to X_0} (f(X)-f(X_0)) \underset{\Updownarrow}{=} \lim_{X\to X_0} \left(\nabla f(X_0)(X-X_0) + \omega(X-X_0)\right) = 0,$$

diferencovatelnost f v X_0

neboť: $\lim\limits_{X\to X_0} \nabla f(X_0)(X-X_0) = 0$, $(X - X_0 \to 0)$

a také $\lim\limits_{X\to X_0} \omega(X-X_0) = \lim\limits_{X\to X_0} \underbrace{\dfrac{\omega(X-X_0)}{\|X-X_0\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|X-X_0\|}_{\to 0} = 0$

A ještě dříve, než si ukážeme příklady diferencovatelných funkcí a užití diferenciálu, poznámka o definici diferencovatelnosti funkce obecnější :

Má-li znamenat (jako v ZS) diferencovatelnost možnost „lineární" aproximace – tak vlastně jde o existenci „blízkého" změně funkce lineárního zobrazení +

Obecně tedy: (často v matematice) $f : M \subset R^n \to R$

Definice: f je diferencovatelná v bodě X_0 (X_0 - vnitřní bod M), když existuje lineární zobrazení $L : R^n \to R$ (tj. $L(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$) takové, že $f(X) - f(X_0) = \vec{a} \cdot (X - X_0) + \omega(X - X_0)$ tak, že

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\| X - X_0 \|} = 0 \qquad (*)$$

Odtud pak už plyne:

1) f je diferencovatelná v $X_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ je spojitá v X_0

2) f je diferencovatelná v $X_0 \Rightarrow$
existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, 2 \ldots n$ a
$\vec{a} = \nabla f(X_0)$!

(tedy jsme došli k „naší" uživatelské definici, zároveň je odtud patrno, že linearizaci s chybou s (*) lze udělat jen jediným způsobem!)

A ještě jiné užívané značení:

$X - X_0 = \vec{h}$; pak f je diferencovatelná v X_0, když

$$f(X_0 + \vec{h}) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h}), \text{ kde}$$

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\omega(\vec{h})}{\| \vec{h} \|} = 0 .$$

Příklady:

1. $f(x,y) = e^{y-x^2}$: $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$; f je spojitá v $\mathbb{R}^2$;

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y-x^2}(-2x)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y-x^2}$
} parciální derivace jsou funkce spojité v $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

f je diferencovatelná v každém bodě $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ a
(označme $x - x_0 = dx$, $y - y_0 = dy$ – obvyklé)

$$df(x_0,y_0) = e^{y_0 - x_0^2}(-2x_0 dx + dy), \quad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$$

(a často se „píše" jen: $df(x,y) = e^{y-x^2}(-2x\,dx + dy)$)

spec: $(x_0,y_0) = (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

a tedy (linearizace)

$$e^{y-x^2} \cong 1 + y \quad \text{pro } (x,y) \text{ „blízko" bodu } (0,0),$$

zkouška: $f(0{,}1; 0{,}02) \cong 1 + 0{,}02 \quad (e^0 = 1)$
$= 1{,}02$

„kalkulačka": $e^{0{,}02 - (0{,}1)^2} = e^{0{,}01} \doteq 1{,}0100501\ldots$

a velikost $\|(0{,}1; 0{,}02)\| = \sqrt{0{,}01 + 0{,}0004} = \sqrt{0{,}0104} \cong 0{,}102$,

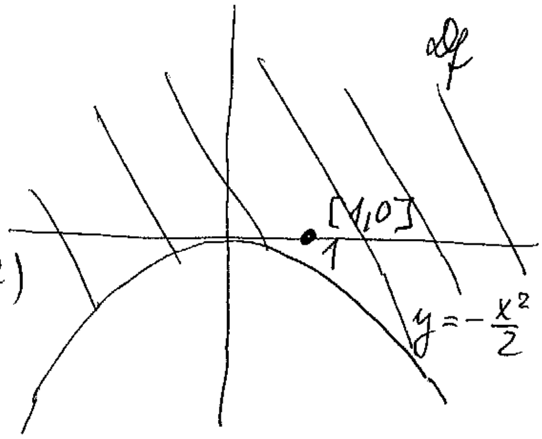
a naše chyba (ve srovnání s kalkulačkou) $\cong 0{,}00995$

tj. $\omega(0{,}1; 0{,}02)$ je výrazně menší, než $\|(0{,}1; 0{,}02)\|$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y}$; $(x_0,y_0)=(1,0)$

$D_f = \{[x,y];\ x^2+2y \geq 0\}$

tj. $y \geq -\frac{x^2}{2}$ $\longrightarrow$ obr.



tedy $(1,0) \in D_f$ (vnitřní bod D_f)

a $\nabla f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2y}}(2x,2)$;

$\nabla f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}}(x,1)$, tedy vidíme, že ∇f je spojitý v D_f $\Rightarrow$ f je diferencovatelná ve všech vnitřních bodech z D_f

$\nabla f(1,0)=(1,1)$

a $df(1,0) = 1.dx + 1.dy$ a v okolí bodu $(x_0,y_0)=(1,0)$

je $\sqrt{x^2+2y} \cong 1 + 1.(x-1) + 1.y$ ($f(1,0)=1$, $dx = x-1$, $dy = y-0$);

tedy například:

$f(1{,}01; 0{,}02) \cong 1 + 0{,}01 + 0{,}02 = 1{,}03$

a kalkulačka „dá": 0,0296115.... – docela dobrá aproximace – ta „naše"! („jednoduchá")

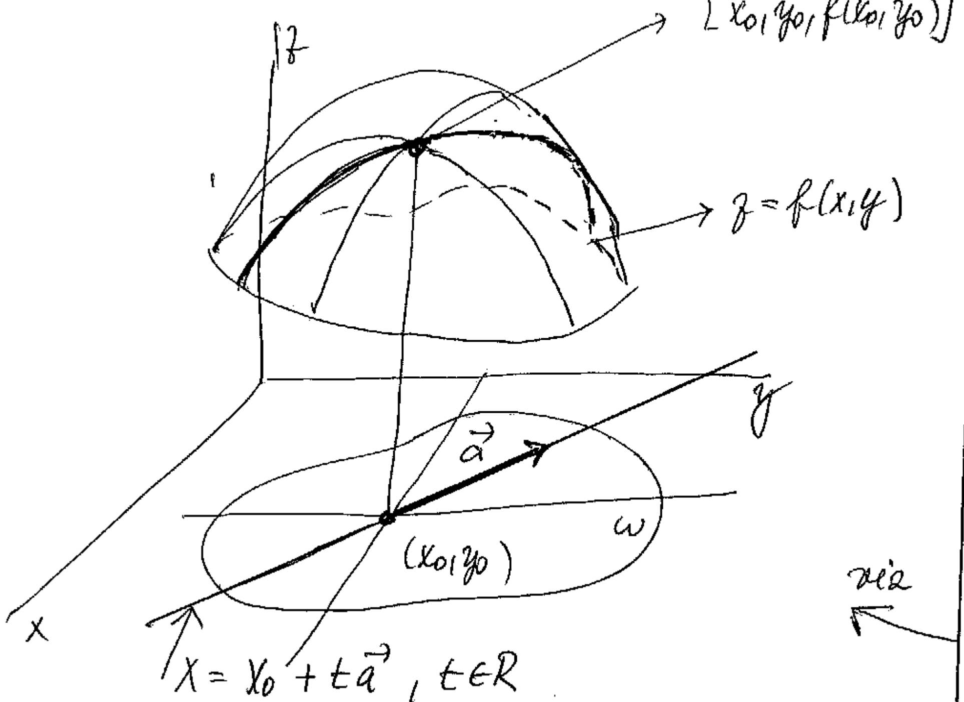
A obecně: v okolí bodu $(x_0,y_0) \in D_f$, $x_0^2+2y_0 \neq 0$ (na hranici $y=-\frac{x^2}{2}$ neexistence derivací – derivace jsou definovány ve vnitřních bodech množiny)

$$\sqrt{x^2+2y} \cong \sqrt{x_0^2+2y_0} + \frac{1}{\sqrt{x_0^2+2y_0}}\left(x_0(x-x_0)+(y-y_0)\right)$$

(v okolí bodu (x_0,y_0)).

A další využití diferencovatelnosti funkce – „derivace ve směru $\vec{a}$"

(Obrázek opět pro $n=2$) Nechť fce f je diferencovatelná v bodě $X_0=(x_0,y_0)$:



Má-li graf funkce $f(x,y)$ tečnou rovinu v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, pak se tato tečná rovina bude dotýkat i dalších „cest" na grafu – i těch, jejichž průmět v Df v rovině $z=0$ je přímka, určená bodem X_0 a vektorem $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$

Tedy, funkce jedné proměnné ($X = X_0 + t\vec{a}$ – parametrizace zvolené přímky) $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $X=(x_0,y_0)$

$$g(t) = f(x_0+ta_1, y_0+ta_2) = \left(= f(X_0+t\vec{a}) \right)$$

má pro $t=0$ (tj. na grafu f v X_0) tečnu o směrnici

$$\underline{g'(0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+t\vec{a})-f(X_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\nabla f(X_0)\cdot t\vec{a} + \omega(t\vec{a})}{t} =$$

$$\left| \left(= \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t}\right) \right| \quad = \lim_{t\to 0} \left(\nabla f(X_0)\cdot\vec{a} + \frac{\omega(t\vec{a})}{t} \right) =$$

$$= \underline{\underline{\nabla f(X_0)\cdot\vec{a}}},$$

neboť $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\omega(t\vec{a})}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\omega(t\vec{a})}{\|t\vec{a}\|}\cdot\dfrac{\|t\vec{a}\|}{t} = 0$ $\left(\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\omega(t\vec{a})}{\|t\vec{a}\|} = 0 \right)$

a shrneme-li náš výpočet:

Je-li fce f diferencovatelná v bodě $X_0=(x_0,y_0)$ (tj. ve vnitřním bodě definičního oboru), pak pro lib. vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$ má funkce $g(t)=f(X_0+t\vec{a})$ derivaci v bodě $t=0$, a to $g'(0)=\nabla f(X_0)\cdot\vec{a}$

(geometricky" - cesta po grafu, která má v D_f průmět "přímku $X=X_0+t\vec{a}$, $t\in R$, má v bodě $[X_0,f(X_0)]$ tečnu o směrnici $\nabla f(X_0),\vec{a}$)

derivaci $g'(0)=\nabla f(X_0).\vec{a}$ se říká derivace funkce f v bodě X_0 ve směru vektoru $\vec{a}$

a značí se (zpravidla)

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0)\left(=D_{\vec{a}}f(X_0)\right)=\nabla f(X_0).\vec{a} \qquad (*)$$

(Poznámka - derivace $\frac{df}{d\vec{a}}(X_0)$ může existovat pro některé vektory $\vec{a}$, i když funkce f není v X_0 diferencovatelná - my budeme pracovat s funkcemi diferencovatelnými, pak platí $(*)$)

a pro libovolné $n>1$ (zobecnění)

Definice: $f: U(X_0)\subset R^n\to R$, $\vec{a}$ je vektor, $\vec{a}\in R^n$, $\|\vec{a}\|=1$; pak derivace fce f v bodě X_0 a ve směru $\vec{a}$ je definována:

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0)=\frac{d}{dt}\Big(f(X_0+t\vec{a})\Big)_{t=0};$$

a platí (důkaz analogický našemu odvození vzorce pro $\frac{df}{d\vec{a}}(X_0)$ v případě $n=2$) : $f: U(X_0) \subset R^n \to R$:

Věta: Je-li funkce f diferencovatelná v bodě X_0, pak má f v bodě X_0 derivaci ve směru $\vec{a}$ $(\vec{a} \in R^n, \|\vec{a}\|=1)$

a $\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = \nabla f(X_0) \circ \vec{a}$

A odtud je vidět pro $n=2$ (ale platí i obecně pro $n \geq 2$) :

! Je-li $\nabla f(X_0) \neq \vec{o}$, pak velikost rychlosti změny funkce f v bodě X_0 je ve směru gradientu f v X_0 (tj. $\nabla f(X_0)$) maximální, neboť pro skalární součin $\vec{u}.\vec{v}$ platí

$|(\vec{u}.\vec{v})| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \measuredangle(\vec{u},\vec{v})|$, tedy velikost $\vec{u}.\vec{v}$ tj. $|\vec{u}.\vec{v}|$ bude maximální, pro $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $(\vec{u},\vec{v} \neq \vec{o})$

tj. bude-li $\vec{a} = \frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$ $(\|\vec{a}\|=1)$, je

$\left|\frac{df}{d\vec{a}}(X_0)\right|$ maximální, a rychlost „sama" bude maximální ve směru $\nabla f(X_0)$, a minimální ve směru $(-\nabla f(X_0))$;

v aplikacích se říká, že $\nabla f(X_0)\ (\neq \vec{o})$ ukazuje směr nejrychlejšího růstu funkce, a $(-\nabla f(X_0))$ směr nejrychlejšího poklesu fce f.

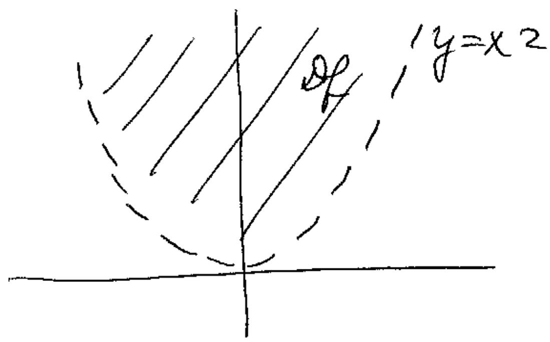
A kdy bude, tj. v jakém směru, bude $\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = 0$?

Když budou $\nabla f(X_0)$, $\vec{a}$ navzájem kolmé, a zároveň víme, že se hodnoty f nebudou měnit „na vrstevnici" – tedy odtud, $\nabla f(X_0)$ je kolmý na tečnu k vrstevnici v bodě X_0.

A tolo už asi víte – chcete-li nejrychleji „z kopce", běžíte, nebo jedete na lyžích, kolmo k vrstevnicím (na mapě) stejně tak největší stoupání do vrchu je ve směru „kolmém" na vrstevnice!

Příklad: Vezměme si už „prozkoumanou funkci"

$f(x,y) = \ln(y-x^2)$



$Df = \{[x,y] \in R^2;\ y > x^2\}$

$\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{y-x^2}(-2x, 1)$,

tj. vidíme, že parciální derivace jsou spojité v Df, a tedy f je diferencovatelná v Df;

$df(x,y) = \dfrac{1}{y-x^2}(-2x\,dx + dy)$, spec.

$df(1,2) = -2dx + dy$ a rovnice tečné roviny je v bodě $(1,2,0)$: $z = 0 - 2(x-1) + (y-2)$, tj.

$$2x - y + z = 0$$

a lineární aproximace v okolí bodu $(1,2) = (x_0, y_0)$:

$\ln(y-x^2) \cong -2(x-1) + (y-2)$, a

$f(0{,}99; 2{,}01) \cong -2(-0{,}01) + 0{,}01 = 0{,}03$

(a kalkulačka: $0{,}0294617\ldots$ „chyba" až na 4. desetinném místě) a derivace v bodě $(1,2)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(a_1,a_2)$:

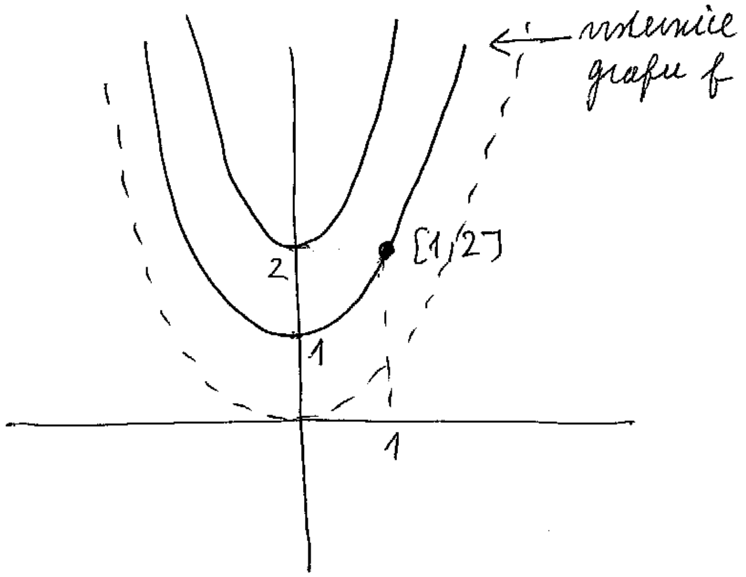
$$\frac{df}{d\vec{a}}(1,2) = -2a_1+a_2 \quad \left(= (-2,1)\cdot(a_1,a_2)\right)$$

<u>a pokus:</u> derivace funkce v bodě $(1,2)$ ve směru vrstevnice:

„Vrstevnice" grafu je dána rovnicí $\ln(y-x^2)=c$, c-konstanta,

tj. $y-x^2=e^c \quad (=k>0)$

Pro bod $(x_0,y_0)=(1,2)$ dostaneme $k=2-1=1$, tj. bod $(1,2)$ leží na vrstevnici o rovnici $y=x^2+1$; vrstevnici si lze představit „i jako obraz" vektorové funkce jedné proměnné – $\vec{\varphi}(x)=(x,x^2+1)$, $x\in R$ a $\vec{\varphi}\,'(x)=(1,2x)$ je tečný vektor vrstevnice v bodě (x,x^2+1); tedy $\vec{\varphi}\,'(1)=(1,2)$ je tečný vektor k vrstevnici v bodě $(1,2)$ a jednotkový vektor tečný k $\vec{\varphi}(x)$ v $(1,2)$ je $\vec{a}=\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}$;



tedy, $$\frac{df}{d\vec{a}}(1,2) = (-2,1)\cdot\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = 0 \ !$$

a obecně – derivace funkce f v bodě $(x_0,y_0)\in D_f$ ve směru tečného vektoru k vrstevnici bude:

$\vec{\varphi}(x) = (x, x^2+k)$, $k>0$ – vrstevnice,

$\varphi'(x_0) = \left(x, x^2+k\right)'_{x=x_0} = (1, 2x_0)$ – tečný vektor k vrstevnici v bodě (x_0,y_0) vrstevnice

Jednotkový vektor, tečný k vrstevnici v bodě (x_0, y_0) je pak

$$\vec{a}(x_0,y_0) = \frac{(1,\, 2x_0)}{\sqrt{1+4x_0^2}} \quad \text{a}$$

$$\frac{df}{d\vec{a}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{a}(x_0,y_0) = \frac{1}{\sqrt{1+4x_0^2}}(-2x_0, 1)\cdot(1, 2x_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4x_0^2}}\left(-2x_0\cdot 1 + 1\cdot 2x_0\right),$$

tj. $\frac{df}{d\vec{a}}(x_0,y_0) = 0$!

Tedy opět: derivace f ve směru vektoru tečného k vrstevnici je nulová, tedy, jak již bylo řečeno, gradient je „kolmý" k vrstevnici $(\nabla f(x,y) \neq \vec{o})$.