

MA2 - "přesunna" přednáška (ka) 18.3.2020 (druhá část)

I. Prostory \mathbb{R}^n - jak je máme chápat, avšak v souvislosti s užitkováním funkcí, o kterých jsme "mluvili" v první části přednášky, tj.
 $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

(i) - z hlediska lineární algebry -

\mathbb{R}^n je "kvalitativně" vektorový (lineární) prostor dimenze n -
- tj. $\dim \mathbb{R}^n = n$; je to "abstraktní" vektorový prostor, jehož prvky $x \in \mathbb{R}^n$ jsou uspořádané n -tice reálných čísel, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, a je zde definováno sečítání ($x+y$) a násobení konstantou (cx), a tyto operace splňují "rozumná" pravidla (viz LA).

Naučte se, v "abstraktním světě" malovat jak libovolný vektorový prostor V , $\dim V = n$, "přesal" pomocí \mathbb{R}^n :
je-li $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ báze V , pak z LA víme, že každý prvek $v \in V$ lze jedinečně vyjádřit lin. kombinací vektorů báze, tj.

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_n \vec{b}_n$$

a zobrazení V na \mathbb{R}^n : $\vec{v} \leftrightarrow (v_1, v_2, \dots, v_n)$,
kde je zobrazení prostým a zobrazením na \mathbb{R}^n lze se z obecného abstraktního prostoru V "dostát" do prostoru \mathbb{R}^n , kde se navíc i snadněji součítá i násobek z prostoru V .

(např. polynomu stupně $\leq n$ lze "nahradit" uspořádanou $(n+1)$ -ticí koeficientů polynomu)

(ii) v našem "světe": ($m \leq 3$)

1) Prvky $x = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru \mathbb{R}^3 lze chápat jako nástroj
pro popis "polohy" bodů (mínějí-li "geometrický"
náš prvek jeho prostor bodů) pomocí sestrojených souřadnic -
my zatím sestavíme u karlévské sestrojených souřadnic:
body aporidla budeme značit A, B, X, Y , a bodům
přičítáme jednorázově (dle pravidel geometrie sestrojených
souřadnic) trojici reálných čísel (každý "úsek"):
 $X \rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, budeme často psát $X = (x_1, x_2, x_3)$

(takto popsaný "prostor bodů" se často značí E^3 a
nazývá "Euklidovský prostor" (jistě se vzdálenosti bodů -
bude za "dvířku" zanedána) - my "zjistíme" u \mathbb{R}^3)

(analogicky, pomocí \mathbb{R}^2 lze popsat body v rovině)

Trojice (x_1, x_2, x_3) jsou "souřadnice" bodu X , často se
ale mluví jednoduše o bodu X (viz zápis $X = (x_1, x_2, x_3)$)

2) Prvky $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ lze učit i k popisu "geometrických
i fyzikálních vektorů - druhá věc, jak si prvky
prostoru \mathbb{R}^3 (a u rovinných vektorů prvky prostoru \mathbb{R}^2)
představit: budeme psát $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ($\vec{v} = (v_1, v_2)$)
Vektor \vec{v} je pak orientovaná úsečka (v našem geometrickém
představení prostoru), která má počáteční bod v $A = (a_1, a_2, a_3)$
a koncový bod $B = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$ (možná také
 $\vec{v} = \vec{AB}$) a \vec{AB} se nazývá umístěním vektoru \vec{v} , A-lib. bod)

A obráceně (jád' jisté více a analyticky geometrie),
máme-li daný bod $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, pak
umístění vektoru $\vec{v} = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

(V literatuře se někdy píše vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,
popsaných zde, namísto zaneřádění vektoru E^3 a množiny V^3 ,
my budeme užívat stejně jako u vektoru bodu R^3 ,
a chápat význam (v_1, v_2, v_3) (terjice čísel) ; dle
situace - někdy jako body, jindy jako vektory)

V lineární algebře byla v R^3 základní báze (kanonická)

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) -$$

- a toto jsou obrasy tří základních vektorů - geometrických -
- navzájem kolmých a délky 1.

V geometrii " také každý geometrický vektor \vec{v} (orientovaná
" úsečka) můžeme být vyjádřen jedinečným ap'roblem

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \quad \text{a tak vlastně " zápis "}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{je vyjádření izomorfismu z LA
(viz (i) zde - abstraktní přístup)}$$

Že takto je správně chápat vyjádření geometrických vektorů
pomocí prvků z R^3 (tedy sčítání a násobení konstantou se zachová)

A fyzikální vektor \vec{f} - má směr, slovně k papíru
veličiny, u které je důležitá kromě velikosti jisté
směr (a orientace) - a opět chápeme analogicky
zápis : $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$

A nyní \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$):

Prvek $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si budeme „představovat“ buď jako

bod - budeme psát spíše $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

nebo jako

vektor - budeme značit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

(opět, podle okolností“)

Co ještě zobecníme z \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2) do \mathbb{R}^n :

1) skalární součin vektorů a velikost vektoru:

v \mathbb{R}^3 : je-li \vec{u} geometrický vektor, velikost $\|\vec{u}\|$ rozumíme
délku „úsečky“ \vec{u} (nebo vzdálenost krajních bodů
vektoru A, B , je-li $\vec{u} = \vec{AB}$)

jsou-li \vec{u}, \vec{v} dva geometrické (nebo „fyzikální“) vektory,
pak skalární součin \vec{u}, \vec{v} je definován pomocí
velikosti $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ a úhlu, který úsečky (orientované)
 \vec{u}, \vec{v} svírají ($\angle(\vec{u}, \vec{v})$):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

jsou-li vektory \vec{u}, \vec{v} vyjádřeny souřadnicemi vzhledem ke
kanonické bázi, tj. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bázi, pak (jako asi máte)

$$\vec{u}, \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{v}_i \quad \text{a norma } \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

(tj. $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$, $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$).

A navíc, pak vzdálenost bodů $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ je délka (tedy norma) vektoru \vec{XY} , tedy (známe d₃(X, Y))

$$d_3(X, Y) = \|\vec{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2} \quad (= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2})$$

(neboť $\vec{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$)

A konečně, do \mathbb{R}^n :

• provede se v matematice obvyklým způsobem - místo $n=3$ budeme psát "jím" $n \in \mathbb{N}$ - a očekává se (a v matematice se musí dokázat, ač u této definovaných prvků se zachovají všechny důležité vlastnosti, které potřebujeme v \mathbb{R}^n)

definice: Je-li $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, pak

1) skalární součin vektorů \vec{x}, \vec{y} je definován:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i;$$

2) norma (metrika) vektoru \vec{x} : • $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}})$

3) vzdálenost bodů $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$d_n(X, Y) = \|\vec{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2})$$

Nejede na to, zda $X \in \mathbb{R}^n$ považujeme za vektor nebo bod, definujeme pro prvky $x, y \in \mathbb{R}^n$ vzdálenost prvků $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\bullet \quad d_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\text{t.j. Euklidovská norma})$$

A vzdálenost v \mathbb{R}^n je srážněč ten každou měřící pro
definici lineity v \mathbb{R}^n a pro vytvoření analogie v \mathbb{R}^n
diferenciálního počtu, který máte z MA1 v \mathbb{R} .

Shrňme si ještě každou vlastnosti skalárního součinu, normy
a vzdálenosti v \mathbb{R}^n (občas to budeme potřebovat):

1) Vlastnosti skalárního součinu: ($\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u}, \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$)
Pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (nebo ke ušíř
množin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$) a lib. $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2) Norma vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$

je-li $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (V^n), $\alpha \in \mathbb{R}$, pak:

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
2. $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (tzv. trojúhelníková
nerovnost)
4. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (Cauchy - Schwarzova
nerovnost - velmi užitečná)

Důležité vlastnosti skalárního součinu jsou, doložen, hned "vidět",
a normy i normy 1. a 2. jsou jasné; důležitý 3. a 4. uděláme
pro zájme "za chvíli". Ještě důležité vlastnosti vzdálenosti.

3, Vzdálenost (obvykle se nazývá "metrika") v \mathbb{R}^n

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, pak

$$d_m(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \quad (= \|B - A\| = \sqrt{(B - A) \cdot (B - A)})$$

a platí: $A, B, C \in \mathbb{R}^n$:

1. $d_m(A, B) \geq 0$, $d_m(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

2. $d_m(A, B) = d_m(B, A)$

3. $d_m(A, B) \leq d_m(A, C) + d_m(C, B)$

(trojúhelníková nerovnost - důležitá!)

(Poznámka - vzdálenost v \mathbb{R}^n se často značí i $\rho_m(A, B)$)

Metrika $d_m(A, B)$ se nazývá Euklidovská metrika v \mathbb{R}^n -
- a často se často nazývá prostě \mathbb{R}^n , Euklidovské
n-dimenzionální prostory.

A nyní ukážeme důležitější vlastnosti metricky, pomocí:

a) metrika: 1) a 2) - přejímá (jak se v matematice často říká)

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{d_m(A, B)} &= \|A - B\| = \|(A - C) + (C - B)\| \stackrel{*}{\leq} \\ &\leq \|A - C\| + \|C - B\| = \underline{d_m(A, C) + d_m(C, B)} \end{aligned}$$

(*)

(*) - dle vlastnosti 3. rovnice metricky: zde

$$\vec{u} = A - C, \vec{v} = C - B$$

b) norma: (definice pro zápis - má oblékání (pro „nealfy“))

③. ukau-li, že platí 4., tj. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, pak

$$\begin{aligned} \text{má: } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \leq (4) \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = \underline{\underline{(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2}}, \end{aligned}$$

tj. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

a

④ - Cauchy-Schwarzova nerovnost

vezmeme si vektor $\vec{u} + \alpha \vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

pak $0 \leq (\vec{u} + \alpha \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \alpha \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \alpha^2 \|\vec{v}\|^2$; (*)

kvadratická funkce v proměnné α (*) je pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ nezáporná, tedy diskriminant „musí“ být $D \leq 0$, tj.:

$$D = 4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0 \text{ a odtud už snadno:}$$

$$\underline{\underline{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}}$$

Poznámka 1: Rozšíření „skalárního součinu vektorů do \mathbb{R}^n “

uvádíme i součet prvních složek dvou vektorů:

Def. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ jsou navzájem kolmé ($\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$),

tedy $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

a lze definovat i úhel „který $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ svírají“: $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$
($\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$)

Poznámka 2.

V matematice pokračoval obecněji se dále rozvíjet -
 je-li $M \neq \emptyset$ neprázdná množina, pak, je-li zde definováno
 zobrazení: $x, y \in M \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$, které splňuje
 vlastnosti metriky (viz 3) ve vyšetřování \mathbb{R}^n - , axiomy
 metriky" - pak takovou množinu nazýváme metrickým
 prostorem a také lze zde budovat pojem limity.

Metrické prostory se uplatňují v matematické disciplíně
 zvané "funkcionální analýza" - velmi užitečné i v aplikacích,
 a vlastně "užitečné" a v matematice důležitě, a i
 v aplikacích (například ve kvantové fyzice) jsou takové
 metrické prostory, které jsou i lineárními prostory (viz LA),
 nekonečné dimenze, a se skalárním součinem -

- tj. opět zobrazením $x, y \in M \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, tak,
 se dané zobrazení má všechny "naše" vlastnosti skalárního
 součinu v \mathbb{R}^n - pak lze se skalárního součinu $\langle x, y \rangle$
 opět (jako v \mathbb{R}^n) odvodit normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ a

také následně $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x - y)$ je definováno,
 jako v lineárním prostoru. Tyto "skutečné" prostory
 se nazývají prostory Hilbertovy - a Hilbert
 zavvedl "první" a měl - rozšířil \mathbb{R}^n , kde
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ se ℓ^2 , což je prostor podprostorů.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ takových, že $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$
 (obecněji $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$) - někdy se "výbrany" partičky"

Poznámka 3

\mathcal{D} v \mathbb{R}^n - jakékoli vzhledem

$$x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$$

takže, že $d(x, y)$ má vlastnosti metriky (Euklidovské),
je metrika, tj. množka \mathcal{D} bude mít právě linie -
- a prostěch konečné dimenze (tj. u nás v \mathbb{R}^n) je ukázané,
že metriky jsou l. ar. křivkami, tedy, bude-li

" $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$ v Eukl. metrice $d_n(x, y)$, bude také
platit v jakékoli "metrice, kterou si " vymyslíme.
(linie v \mathbb{R}^2 souhlasí s "ačnicku")

Příklady "místních" metrik, pro jednoduchost v $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$

(nemáme sání vyhovět, že axiomy metriky jsou zde
splněny); pro $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ definujeme

(i) $d(x, y) = \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|$ - l. ar. metrika "postáčka"
(nebo New Yorkská)

(ii) $d_{\max}(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

(analogicky lze i v \mathbb{R}^n)

Poznámka 4.

Máme-li má metrika v prostěch \mathbb{R}^n , nemáme má
středovat limity, spojitost, derivace (analogie) a funkce!

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ "asi" podobně jako v MA1 pro $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ale doufal'm, ať si pamatujete, ať vlastnosti funkce' (např. existenci' f') nebyly dány jin' vlastnostmi vyšetřované' funkce, ale i "druhem" množiny, a vlastnostmi této množiny, ne které' jiné funkce vyšetřovali - např. spojitá' funkce má vždy globální extrémy na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, ale stačí', aby chyběl "jeden krajní' bod intervalu, a pak už' toto nemusí' platit'!

Takže i při' vyšetřování' "obecnějších" funkcí' budeme muset' ukázat a popsat vlastnosti množin v \mathbb{R}^n - podrobně to na příští' přednášce - u funkcí', kterými' "začneme", toto nebudeme "potřebovat".

II. Vektorové funkce jedné' proměnné' - limity, spojitost, derivace

Jak už' bylo řečeno, vektorové funkce jedné' proměnné' rozumieme "zobecněním" $\vec{f}: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 1$, podrobněji

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in M,$$

a $f_1(x), \dots, f_n(x)$ jsou reálné funkce, $f_i(x): M \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n$.

(Příkladky byly dány v první' části přednášky)

A nyní' - limity "vektorových" funkcí' ?

Axi' opěť "zobecnění" lineárny $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($M \neq \emptyset$):

Připomeneme definici' vlastní' limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ($a \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

($f(x)$ je libovolně' blízko L pro x , dostatečně' blízko' bodu a ($a \neq x$) - "lidovější" formulace definice)

Zobecněná "vlastní" limity pro funkce $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Def.: Nechť f je definována v $P(a)$ (v prstencovém okolí bodu a)
Pak řekneme, že f má v bodě a limitu $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$, a píšeme
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \vec{L}$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow d_m(\vec{f}(x), \vec{L}) < \varepsilon \quad (1)$$

Pěkně! Ale co ta definice znamená? A jak se taková limita spočítá?

Zkusme se podívat na $d_m(\vec{f}(x), \vec{L}) < \varepsilon$:

dle definice $d_m(x, y)$ v \mathbb{R}^n :
 $\vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ $\sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x) - L_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f_i(x) - L_i| (= \sqrt{(f_i(x) - L_i)^2}) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x) - L_i)^2} < \varepsilon$$

a tedy platí, když $\lim_{x \rightarrow a} \vec{f}(x) = \vec{L}$ (dle (1)), že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: \forall i=1, 2, \dots, n: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - L_i| < \varepsilon,$$

tj. $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$ (limity každé složky f je odpovídající složka \vec{L})

A obráceně "že" platí:

$$\text{" když } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i \text{ , pak } \lim_{x \rightarrow a} \vec{f}(x) = \vec{L}$$

$i=1, 2, \dots, n$

(tenku technicky náročnější důkaz, ale ani těžší -
když každá složka $|f_i(x) - L_i|$ je "malá", bude i malá
 $d_m(\vec{f}(x), \vec{L}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(x) - L_i)^2}$.

Skusob: $\lim_{x \rightarrow a} \vec{f}(x) = \vec{L} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i, i=1,2,\dots,n$

Tedy "čísly" - "limity vektoru je vektor limit", neboli

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$$

A nyní dále už zjednoduče:

Správně pro \vec{f} v bodě a : \vec{f} je def. v $U(a)$ a

Definice: \vec{f} je spojitá v bodě a , když $\lim_{x \rightarrow a} \vec{f}(x) = \vec{f}(a)$;

Věta: \vec{f} je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow f_i(x)$ je spojitá v $a, i=1,2,\dots,n$.

Derivace \vec{f} v bodě a :

Definice: (kopie "derivace funkce (reálné) jedné proměnné")

Derivací $\vec{f}'(a)$ funkce \vec{f} v bodě a nazýváme

$$\vec{f}'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(a)}{x - a} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)}{h})$$

Věta: \vec{f} má v bodě derivaci $\vec{f}'(a) \Leftrightarrow$ každá složka $f_i(x), i=1,2,\dots,n$ má derivaci $f_i'(a)$.
(uvážejme zde již vlastní derivace)

Tedy:
(lidově)
" " $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))' = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x))$,
" " tj. derivace vektoru " je vektor derivací "

Příklady:

1) $\vec{f}(t) = (1+2t, 2-t, t)$ je vektorová funkce, definovaná a spojitá v \mathbb{R} (j. v lib. bodě $t \in \mathbb{R}$ je \vec{f} spojitá)

$$\text{a } \vec{f}'(t) = ((1+2t)', (2-t)', t') = (2, -1, 1), t \in \mathbb{R}$$

2) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$ - opět, \vec{f} je spojitá v \mathbb{R} a
 $\vec{f}'(t) = (1, 2t, 3t^2), t \in \mathbb{R}$

3) $\vec{f}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, \vec{f} je spojitá v \mathbb{R} , a
 $\vec{f}'(t) = (-R \sin t, R \cos t), t \in \mathbb{R}$

Všimněte si zde, ať vektor $\vec{f}(t)$ a $\vec{f}'(t)$ jsou navzájem

$$\text{kolmé! : } \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = (R \cos t, R \sin t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) = \\ = -R^2 \cos t \sin t + R^2 \sin t \cos t = 0!$$

a. jak víte z geometrie, tečna ke kružnici je kolmá k poloměru, libná' přelomá středem kružnice a bodem dotyku!

4) udáme-li funkci $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, pak graf ji parametrisujeme: $G_f(x) = (x, f(x)), x \in (a, b)$ (tj. graf popisá vektorovou funkci); pak

$$G_f'(x) = (1, f'(x)) - \text{derivace } G_f(x) \text{ a tento}$$

vektor je směrový vektor tečny ke grafu v bodě $[x, f(x)]$:

$$\text{známe rovnici tečny : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \\ \text{ke grafu } f \text{ v bodě } [x_0, f(x_0)]$$

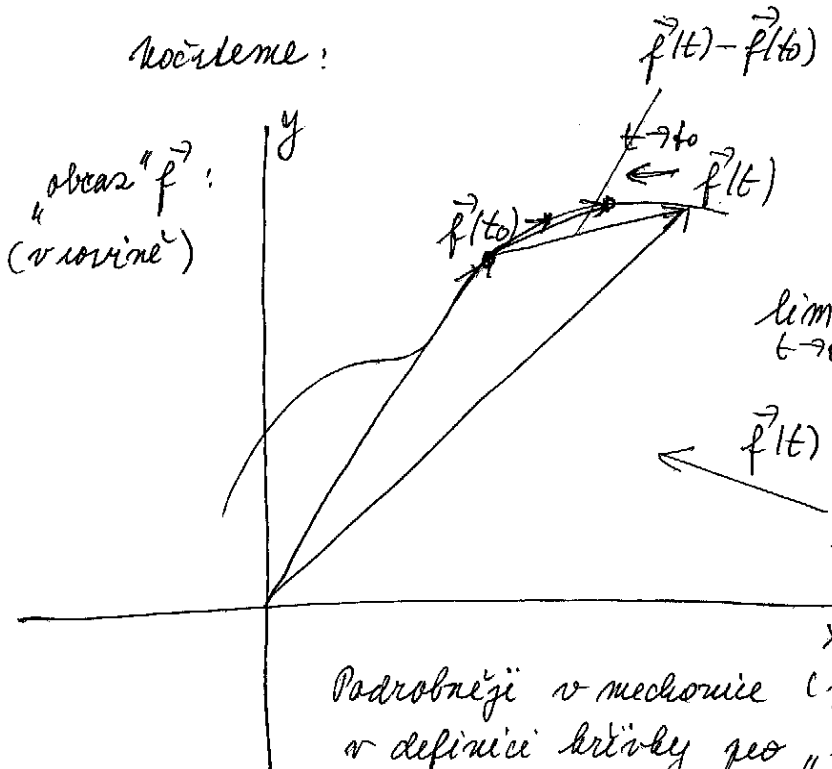
a parametrisace tečny: $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
 (ke grafu f v $[x_0, f(x_0)]$)

tedy je vidět, že vektor $(1, f'(x_0))$ je směrový vektor tečny ke grafu f v bodě $[x_0, f(x_0)]$

Pokud je $n=2$, nebo $n=3$, pak uvažujme body (v rovině, nebo v prostoru) $[f_1(x), f_2(x), f_3(x)], x \in (a, b)$ (pro vektorovou funkci $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, definovanou na (a, b)) si lze (při vhodných předpokladech - \vec{f} je \vec{f}' a, ex. \vec{f}' v (a, b)) jako křivku v rovině (nebo v prostoru) - blíže u křivky nebo integrálu posadí, nebo ne fyzice (umělosti) jako popis dráhy pohybu ($\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in J$).

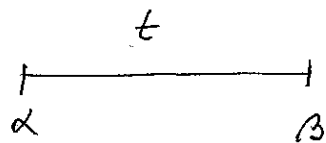
Pak, je-li $\vec{f}'(x_0) \neq \vec{0}$, je $\vec{f}'(x_0)$ vektor tečny ke křivce "v bodě" $\vec{f}(x_0)$ (nebo - fyzika - $\vec{f}'(t_0)$ je tečný vektor ke dráze pohybu, $\vec{f}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$)

nočíme:



$$\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$$

a pokud $t \rightarrow t_0$ v limitě
 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$, směřujeme
 vektorů se
 blíže ke tečné



Podrobněji v mechanice (fyzika), a pak také "my" v definici křivky pro "křivkový" integrál.