

MA2 - příloha " k předmětové přednášce 16.3. :

" nechalik dalších příkladů řešení soustav OLDR 1. řádu

1. Příklad "ne" řešení nehomogenní soustavy OLDR 1. řádu

Je dána počáteční úloha :

$$x_1' = -x_1 + 2x_2 + t, \quad x_1(0) = -1$$

$$x_2' = x_1 - 1, \quad x_2(0) = 2$$

(i) řešení homogenní soustavy: $x'(t) = A \cdot x(t)$ (1) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ uřičet vlastní čísla } A: \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (\det(A-\lambda I) = 0)$$

$$\text{J: } \lambda(\lambda+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 - \text{ kořeny } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \\ \text{(k: vlastní čísla } A)$$

a vlastní vektory: $\vec{v}^{(i)} = (v_{1i}, v_{2i})$, $i=1,2$:

$$\lambda_1 = 1$$

$$-v_{11} + v_{21} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a pak řešení (1):

$$v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$v_{12} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a pak řešení (1):

$$v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(Formátka - vlastní vektory je nekonečně mnoho -

$$- v^{(1)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad v^{(2)} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

nežádejte si "zvolit" i jiné z nich pro fund. systém řešení)

-2-

Máme tedy fundamentální matici řešení $V(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ t & -2t \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$
($t \in \mathbb{R}$)

a obecné řešení homogenní soustavy je pak

$$X_H(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) a skúsme variaci konstant (metoda via pŕidnabŕka):

Kdežto $X_p(t) = V(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$, dostaneme pro $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = c(t)$

rovnici $c'(t) = V^{-1}(t) f(t)$, kde $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ v našem
pŕibŕohu;

a tedy $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ t & -2t \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$

vypočítá: $\begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ t & -2t \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{e^t}{3} \begin{pmatrix} -e^{-2t} & -2e^{-2t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} -2t & -2t \\ e^t & 2e^t \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$

tedy: $\text{del} \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix} = -3e^{-t}$ $V^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -t & -t \\ e^t & 2e^t \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

a dostáváme :

$$C'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (t-2)e^{-t} \\ (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

a odhad (integrace per partes "každě složce" vedle sebe) :

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(t-2)e^{-t} - e^{-t} \\ (t+1)\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} \\ \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} \end{pmatrix}$$

a $x_p(t) = \mathcal{V}(t) \cdot C(t)$, tedy

$$\underline{x_p(t)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} \\ \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}}, t \in \mathbb{R}$$

Obehrané řešení naší soustavy je tedy

$$(*) \underline{x_{\text{ob}}(t)} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

A řešení předecím sloky $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: hledáme " $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ v (*):

$$x=0: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \underline{\underline{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \dots}}$$

Partikulární řešení v naší "hlase lze najít i odkodem

(analogicky jako u OLDR 2. řádu)

odkod :
$$\begin{aligned} x_1(t) &= At + B \\ x_2(t) &= Ct + D \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} f_1(t) = t \\ f_2(t) = -1 \end{array} \right) ;$$

pokud dosazením $x_1(t), x_2(t)$ do soustavy dif. rovnic dostaneme soustavu lineárních rovnic pro hledané koeficienty A, B, C, D :

$$A = -(At+B) + 2(Ct+D) + t \quad (i)$$

$$C = At+B - 1 \quad (ii)$$

$$\begin{array}{l} 2(i) : \\ \quad ut : \\ \quad ut^0 : \end{array} \quad \begin{array}{l} A - 2C = 1 \\ A + B - 2D = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2(i) : \\ \quad ut : \\ \quad ut^0 : \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{řešení :} \\ A=0, B=\frac{1}{2}, \\ C=-\frac{1}{2}, D=\frac{1}{4} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 2(ii) \\ \quad ut : \\ \quad t^0 : \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 0 \\ -B + C = -1 \end{array}$$

A tedy máme opět vycházet :

$$\underline{x_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}}$$

Poznámka:

1) c_1, c_2 pro řešení přátečím úlohy (v zadání) si můžete laskavě spočítat sám (cituji našeho švihlého učitele - profesora V. Jarníka) ;

2) můžete si akusit darrn přátečím úlohu vyřešit i "převodem" soustavy na rovnici 2. řádu - viz zápis přednášky 16.3..

2. A giťe abstrakční dva pŕíklady - pro zŕejmce ($n=2$)
(dokonalne' člene')

a) charakteristická rovnice matice soustavy ma' dvojnásobný kŕem
(tj. matice ma' dvojnásobné vlastní čísla)

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1' &= 3x_1 - x_2 \\ (2) \quad x_2' &= 4x_1 - x_2 \end{aligned} \quad , \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\det(A - \lambda I) = 0 : \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 ,$$

$$\text{tedy } \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

a tedy zde neumíme (my) najít fundamentální systém řešení;
skúsme tedy pŕiřít k rovnici OLDR 2. řádu:

$$2 (1) : \quad x_2 = -x_1' + 3x_1 \quad \text{a dosadíme do (2) máme}$$

$$3x_1' - x_1'' = 4x_1 - (-x_1' + 3x_1) , \quad \text{tj.}$$

$$\underline{x_1'' - 2x_1' + x_1 = 0}$$

charakteristická rovnice je (opět) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

a (dle toho, co máme o řešení OLDR 2. řádu) je

$$\underline{x_1(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t} \quad , \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

a pak ($x_2 = -x_1' + 3x_1$) dostaneme

$$\underline{x_2(t) = 2c_1 e^t + c_2(2t-1)e^t} \quad , \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Zapišme nálezek vektorové (překledně):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) e^t$$

a: vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ je vlastní vektor matice A , příslušný $\lambda=1$:

$$(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ a nebo}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

a kde se „nal“ vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ u c_2 ?

(Všimněte si, ať vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ se u c_2 „posunel“ e^t)

vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ je řešením soustavy rovnice $(A - I) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\text{tj: } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad !$$

(o tom pojednáva' blíže lineární algebra)

a nakonec příklad:

b) Charakteristika' rovnice matice soustavy má' kořeny komplexní:

vezmeme si zjednodučený příklad:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1' = x_2 \\ (2) \quad x_2' = -x_1 \end{array}, \text{ tj: } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ charakteristické rovnice je } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{tg: } \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{a} \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

zhruba opět "eliminací" metody (a řešení OLDR 2. řádu):

$$z(1): \quad x_2 = x_1', \text{ dosazení do (2): } x_1'' = -x_1, \text{ tg.}$$

$$\text{pro } x_1(t) \text{ máme rovnici: } \underline{x_1'' + x_1 = 0}$$

$$\text{charakteristické k.: } \lambda^2 + 1 = 0 \text{ (opět)} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\text{a řešení (umělé): } x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{a pak tedy } x_2(t) = x_1'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Opět - mohl bych: obecné řešení je

$$(*) \quad \underset{H}{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{a, také } \underset{H}{x(t)} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } v(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Přímé řešení úlohy: $x(t_0) = p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$x_{\text{př}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$(x_{\text{př}}(t) = v(t) \cdot v^{-1}(t_0) \cdot p)$$

Speciálně pro $t_0=0$: $v(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v^{-1}(0)$,

tedy řešení počáteční úlohy pro $x(0)=p$ je

$$x_{\text{poč}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ukažme si i vektorové "řešení" soustavy (jako příklad na práci s komplexními čísly a komplexní exponenciálou):

(i) vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

(opět) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, tj. vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$

vlastní vektory:

$$\lambda_1 = i \quad : \quad -i v_{11} + v_{21} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i \quad : \quad i v_{12} + v_{22} = 0 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

a pak fundamentální systém ("komplexní")

$$v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

A díky linearity - soustavu řeší i $\operatorname{Re} v^{(1)}(t) (= \operatorname{Re} v^{(2)}(t))$ a i

$$\operatorname{Im} v^{(1)}(t) (= -\operatorname{Im} v^{(2)}(t)),$$

což jsou vektory, které jsou reálnými řešeními rovnice 2. řádu (*).

Na adněř žiřte akusme řeřeňe' nehomogenní souřtavy :

časlo se mařba' homogenní souřtavy $x'(t) = Ax(t)$
souřtavy autonomní, pak souřtavy $x'(t) = Ax(t) + f(t)$
že souřtavy neautonomní)

①
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + \cos t, & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= -x_1 + 2, & x_2(0) &= 2 \end{aligned} \quad \text{-- tedy } f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Variace konřtanř:

hledáme $x(t) = v(t), c(t)$, tedy zde

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \text{ a pro měřlor } \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

dřivřeře' :
$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ tedy}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t - 2\sin t \\ \sin t \cos t + 2\cos t \end{pmatrix}$$

a integraci (řhřeře sami a řekontrolujte řpsledek zde)

$$c_1(t) = \int (\cos^2 t - 2\sin t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2\cos t + c_1$$

$$c_2(t) = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2t + 2\cos t \right) dt = -\frac{1}{4}\cos 2t + 2\sin t + c_2$$

a tedy (řtaeř uęřř $x_p(t)$ a "řeřeřeř" ř $x_H(t)$ - ř. řuř $c_1=0, c_2=0$)

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2\cos t \\ 2\sin t - \frac{1}{4}\cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{4}\sin t + 2 \\ -\frac{1}{2}t \sin t - \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$.

(a řeřeňe' řeřeřeře' ůlohy akusme sami)

② a ukázně ještě odhad partikulárního řešení:

$$\begin{array}{l} x_1' = x_2 + t \\ x_2' = -x_1 + 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{odhad} \quad x_p(t) = \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$$

a nyníž (opět dosadíme do soustavy):

$$\begin{array}{l} A = (Ct+D) + t \quad , \text{ tj. } (C+1)t + D - A = 0 \\ C = -(At+B) + 2 \quad , \text{ tj. } -At + (-B-C+2) = 0 \end{array}$$

a odhad (opět srovnáme koeficientů u polynomů obou rovní):

$$\begin{array}{ll} C+1 = 0 & \Rightarrow C = -1 \\ D-A = 0 & \Rightarrow D = 0 \\ -A = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ 2-B-C = 0 & \Rightarrow B = 3 \end{array}$$

tedy $x_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

a $x_{\text{ob}}(t) = x_H(t) + x_p(t), \text{ tj.}$

$$x_{\text{ob}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, \sin t \\ -\sin t, \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
