Trigonometrické řady. Fourierovy řady.

A) Trigonometrické řady. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ... (*)

1. Ukažte, že platí:

a) $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ konverguje $\Rightarrow$ řada (*) konverguje v R absolutně a stejnoměrně ke spojité 2π-periodické funkci.

b) Je-li $\{b_n\}$ klesající, $b_n \to 0$, pak $\sum_1^{\infty} b_n \sin nx$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle c,d\rangle \subset (-\pi,\pi)$, $0 \notin \langle c,d\rangle$; je-li $\{a_n\}$ klesající, $a_n \to 0$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle c,d\rangle \subset (-\pi,\pi)$, $0 \notin \langle c,d\rangle$.

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \sum_{n=1}^{k} \cos nx = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right)$$

c) nechť 1) řada (*) konverguje aspoň v jednom bodě $x_0 \in (-\pi,\pi)$

2) řada (vzniklá z (*) derivováním člen po členu)
$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$
konverguje stejnoměrně k funkci $d(x)$ v $(-\pi,\pi)$.

Pak řada (*) konverguje stejnoměrně v $(-\pi,\pi)$ k fci $s(x)$, pro kterou je $s'(x) = d(x)$, $x \in (-\pi,\pi)$.

2. Vyšetřete obor a způsob „konvergence" trigonometrických řad:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}$ (absolutně a stejnoměrně v R ke spojité, liché, 2π-per. fci)

b) $\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k\sqrt{k}}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{k \cdot \ln^2 k}$

(konvergují absolutně a stejnoměrně v R k sudé (spojité, 2π-per. fci)

c) $\frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \dots \right]$

(absolutně a stejnoměrně ke spojité funkci (2π-per.) $s(x)$ – – prodejí: $s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}, & x \in \langle -~~\pi~~ \langle -\pi, 0) \\ \sin x - \frac{1}{\pi}, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$.)
(viz B 2.7)

Ukažte, že $|s(x)| \leq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$.

d) $-\frac{1}{2} \cos x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{(2k-1) \cdot 2k\,(2k+1)}$

(absolutně a stejnoměrně v R ke spojité, 2π-per. funkci) jak souvisí tato řada s řadou v c)? Umíte najít součet této řady pomocí c)?

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ (konvergují bodově v R, lokálně stejnoměrně v $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, prodejí – Four. řady – nekonvergují stejnoměrně na žádném okolí 0)

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

(konvergují stejnoměrně a absolutně v R pro $\alpha > 1$;
pro $0 < \alpha \leq 1$ konvergují stejnoměrně na každém $\langle c, d \rangle \subset (-\pi, \pi)$, $0 \notin \langle c, d \rangle$;
řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$ nekonv. pro $x = 0$
řada $\sum \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ konv. v $x = 0$)

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ (bodově konv. v R, stejnoměrně na každém $\langle c, d \rangle \subset (-\pi, \pi)$, $0 \notin \langle c, d \rangle$.

B. Fourierovy řady

1. Ukažte, že platí:

a) $\frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ konverguje stejnoměrně v $R \Rightarrow$
$\Rightarrow$ součet (označme $f(x)$) je spojitá, 2π periodická funkce
a $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

(Fourierovy koeficienty fce $f(x)$)

b) také platí (za předpokladů z a)) $(a \in R)$
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

c) $f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ konvergují absolutně.
(Užijte Besselovu nerovnost a toho, že $|\alpha\beta| \le \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$)

d) užitím c) ukažte, že trigonometrická řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$
(viz A - 2g) není Fourierovou řadou svého součtu
(ani žádné jiné v $[-\pi,\pi]$ integrovatelné funkce)
(srovnejte s rozvojem funkce v mocninnou řadu)

e) f je liché v $(-\pi,\pi)$, $f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow a_n = 0$, $n = 0,1,\dots$
f je sudé v $(-\pi,\pi)$, $f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow b_n = 0$, $n = 1,2,\dots$

Označení: Je-li f 2π-periodická funkce, $f \in R[-\pi,\pi]$, její Fourierovu řadu (formálně sestavenou) budeme značit $\Phi_f(x)$.

(2.) Najděte Fourierovu řadu periodické funkce s periodou 2π, definované na $(-\pi,\pi)$ (nebo $\langle -\pi,\pi)$, případně $\langle 0,2\pi)$) takto (rozhodněte, zda F. řada konverguje bodově nebo i stejnoměrně, nakreslete součet $\Phi_f(x)$ a porovnejte s hodnotami $f(x)$):

2.1. $f(x) = \operatorname{sgn} x \,,\quad x \in \langle -\pi, \pi)$

($\operatorname{sgn} x = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin (2n+1)\pi}{2n+1}$ pro $x \in (-\pi,\pi)$

$\Phi_f(\pm\pi) = 0$

bodová konvergence, nemůže být stejnoměrná – konverguje k nespojité funkci)

2.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (vhodná volba x v 2.1)

2.3. $f(x) = |x| \,,\quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

($|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$ v $\langle -\pi,\pi\rangle$,

F. ř. konverguje stejnoměrně v R)

2.4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ (vhodná volba x v 2.3)

2.4. $f(x) = x \,,\quad x \in \langle -\pi, \pi)$

$x = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ pro $x \in (-\pi,\pi)$ (bodová konvergence)

$\Phi_f(k\pi) = 0$

2.5. $f(x) = x, \quad x \in \langle 0, 2\pi)$

(totiž: $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & x \in \langle -\pi, 0) \\ x, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$)

$$\left(\begin{array}{ll} f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, & x \in (0, 2\pi) \\ \phi(2k\pi) = \pi & \text{(bodová konvergence)} \end{array} \right)$$

2.6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{-x + \pi}{2}$ v $(0, 2\pi)$

2.7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0) \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} \quad \text{v } \langle -\pi, \pi \rangle$$

(Φ_f konverguje stejnoměrně v R ke spojité, 2π-per. fci)

2.8. $f(x) = |\cos x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

($\Phi_f \rightrightarrows \hat{f}$, $\hat{f}$ je 2π-per. rozšíření fce f na R

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle \Big)$$

2.9. $f(x) = |\sin x|, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

$$\Big(|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$\left(= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \right),$$

Φ_f konverguje stejnoměrně k 2π-periodickému rozšíření f na R)

2.10. $f(x) = x^2, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$

$\Big(\Phi_f \rightrightarrows \tilde{f}$, $\tilde{f}$ 2π-periodické rozšíření fce f na R;

$x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} \cos kx, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle \Big)$

2.11. Z 2.10:

$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12} \qquad (x = 0)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \qquad (x = \pi)$

2.12. $f(x) = x(\pi - x)$ na $\langle 0, \pi)$

1. kosinová F. řada (f se sudě rozšíří na $\langle -\pi, 0)$, $\tilde{f}$ je 2π-periodické rozšíření na R)

$\Big(x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2kx}{k^2}$ v $\langle 0, \pi \rangle$,

$\Phi_f \rightrightarrows \tilde{f}$ v R; opět $(x=0)$ $\sum \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \Big)$

2. sinová F. řada (f je na $\langle -\pi, 0)$ rozšířena lichě, $\tilde{f}$ je 2π-periodické rozšíření z $\langle -\pi, \pi)$ na R)

$\Big(x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}, \quad \Phi_f(x) \rightrightarrows \tilde{f}(x)$ v $R \Big)$

2.13. $f(x) = \dfrac{x}{\pi} - 1, \quad x \in \langle 0, 2\pi).$

$\Big(\dfrac{x}{\pi} - 1 = -\dfrac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots \right)$, tj.

$\dfrac{x}{\pi} - 1 = -\dfrac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$; $\Phi_f \to f(x)$ v $(0, 2\pi)$ – bodově,

$\Phi_f(2k\pi) = 0 \Big)$