

Vyšetřování lokálních a globálních extrémů – zatím jednodušší příklady:

1. Vyšetřete na množině M globální a lokální extrémy následujících funkcí:

- $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$, $M = \mathbb{R}^2$;
- $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M , je-li:

- $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$, $M = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$;
- $f(x, y) = xy^2$, $M = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$, $M = \{(x, y); x^2 \leq y \leq 4\}$;
- $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, $M = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Funkce definované implicitně – jednoduché příklady na začátek :

Ukažte, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0) definována implicitně funkce $y = f(x)$.

Pak i) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$,

ii) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x, y) = 0$ v bodě (x_0, y_0) ,

iii) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ pomocí Taylorova polynomu 2. stupně, když:

- $F(x, y) = x^2 - y^3 + x^2y - 1$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;
- $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$;
- $F(x, y) = xy - e^x + e^y$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
- $F(x, y) = xy - \ln x - 2$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$;
- $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.