

MAI – 13.cvičení (7.1.2014) - derivace funkce, užití derivace.

1. Výpočet limit funkcí užitím L' Hospitalova pravidla:

Vypočítejte limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x$ ($a > 0$); $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 - \frac{2}{x})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \arcsin \frac{1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) \cdot (\log(n^2 - 4) - 2 \log n)$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x$; $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x)^{\frac{1}{2x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Spojitost funkce, výpočet derivací a dopočítávání derivací ve „špatných“ bodech:

- a) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce $f(x) = |\ln x|$ a $g(x) = |\ln^3 x|$ v bodě $x = 1$.
Dokážete výsledek zobecnit?
- b) Je dána funkce f předpisem: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$.
Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá.
- c) Funkce f je definována: $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$, pokud $x \neq 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{2}$.
Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x \in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.
- d) Funkce f je definována: $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$, pokud $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.
Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x \in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.
- e) Je dána funkce f předpisem: $f(x) = x^3 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in R$. Ukažte, že také první derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

3. Vyšetřování extrémů funkce (globálních i lokálních) , vyšetřování průběhu funkce:

a) průběh funkce ($\exp(x) = e^x$):

$$f(x) := \frac{x}{x^2-1}; \frac{|x|}{x^2-1}; \left| \frac{x}{x^2-1} \right|; \frac{x^3}{x^2-1}; \frac{1}{x} + 4x^2; \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$f(x) := x^2 e^{-x}; x e^{-x^2}; e^{\frac{1}{x}}; e^{\frac{1}{x}} - x; \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \frac{e^{-x}}{2-x}; |x| e^{-|x-1|};$$

$$f(x) := x + \sin x; x - 2 \operatorname{arctg} x; \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right); \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$f(x) = x \ln x$$

b) vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x) = \exp\left(\sqrt{|1-x^2|}\right)$.