

MAI 1 – příklady pro „8. cvičení“

Spojitost funkce.

- Je dána funkce $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ pro $|x| < 1$, $f(x) = 0$ pro $|x| \geq 1$.
Ukažte, že funkce f je spojitá v \mathbb{R} .
- Jsou dány funkce $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o spojitosti funkce $f + g$ a $f \cdot g$ v bodě 0. A vaše tvrzení odůvodněte.
- Ukažte, že platí: když je $|f(x)| \leq x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak funkce $f(x)$ je spojitá v bodě 0.
- Ukažte, že platí: jsou-li funkce $f(x), g(x)$ spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $|f(x)|$, $\max(f(x), g(x))$ i $\min(f(x), g(x))$ jsou funkce spojité v bodě a .
- Může mít Darbouxovu vlastnost i funkce nespojitá na intervalu (a, b) ?
A může i funkce nespojitá na intervalu (a, b) zobrazit tento interval na interval?

Derivace funkce.

- Dokažte, že platí „tahákové“ vzorce:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0; \quad \text{b) } (\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{c) } (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty); \quad \text{e) } (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Výpočet derivace funkce.

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$$f(x) := \frac{1}{x} + 4x^2; \quad \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}; \quad x + \sin x; \quad x^2 \sin x; \quad x \ln(x-3); \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \frac{x^3}{x^2-1}; \quad \frac{2}{(x^3-2)^2};$$

$$x - 2 \arctg x;$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}; \quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; \quad \sqrt{1+\sin 4x}; \quad \cos \sqrt{x}; \quad x^2 e^{-x}; \quad e^{\frac{1}{x}} - x; \quad \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \quad \frac{e^{-x}}{2-x}; \quad \sqrt{x} \arctg \sqrt{x};$$

$$x^2 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right); \quad e^{-3x^2} \cos(\ln 2x); \quad \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$x^3 \ln(\arctg 2x); \quad \sqrt{x^2+1} \arctg(\sin 2x); \quad \arctg\left(\frac{1-x}{1+x}\right); \quad \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

3. Spojitost funkce, výpočet derivací a „dopočítávání“ derivací ve „špatných“ bodech:

a) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce

(i) $f(x) = |x|$ a $g(x) = |x^3|$ v bodě $x=0$

(ii) $f(x) = |\ln x|$ a $g(x) = |\ln^3 x|$ v bodě $x=1$.

(iii) $f(x) = |\arctg x|$ a $g(x) = |\arctg^3 x|$ v bodě $x=0$

Dokážete výsledek zobecnit ?

b) Je dána funkce f předpisem : $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.Ukažte, že také derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$ c) Je dána funkce f předpisem :

(i) $f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá. Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.Ukažte, že také derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

(ii) $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá .

Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a vyšetřete i zde spojitost derivace funkce f v bodě $x_0 = 0$.