

## MAI 1 - 8. cvičení

### Derivace funkce a užití derivace.

#### 1. Výpočet limit funkcí užitím l' Hospitalova pravidla:

Vypočítejte limity:

a) limity „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$

b) limity „ $0 \cdot \infty$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x \quad (a > 0); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \arcsin \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) \cdot (\log(n^2 - 4) - 2 \log n);$$

c) limity „ $\infty - \infty$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x);$$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x)^{\frac{1}{2x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2};$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

#### 2. Dopotávání derivací ve „špatných“ bodech – cvičení na užití (či neužití) věty 8.24 (z přednášky 8.) : (někdy je „dopotávání“ derivací užitím definice i jednodušší než počítat limitu derivace v bodě, kde potřebujeme derivaci „dopotat“)

a) Spočítejte derivaci  $f'(1)$ , případně jednostranné derivace  $f'_+(1)$  nebo  $f'_-(1)$  funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

b) Ukažte, že  $f$  je spojitá v  $R$  a dále zjistěte, pro která  $x \in R$  existuje derivace, případně jednostranné derivace  $f'_+(x)$  nebo  $f'_-(x)$  (a tyto derivace spočítejte), když:

i) Funkce  $f$  je definována :  $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ , pokud  $x \neq 0$  a  $f(0) = 0$ .

ii) Funkce  $f$  je definována :  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$ , pokud  $x \neq 0$  a  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

iii) Je dána funkce  $f$  předpisem :  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

c) Je dána funkce 
$$f(x) = \cos \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} .$$

Najděte definiční obor funkce  $f$ . Vyšetřete spojitost funkce  $f$  v  $D_f$ . Dále zjistěte, pro která  $x \in D_f$  existuje derivace  $f'(x)$ , případně jednostranné derivace  $f'_+(x)$  nebo  $f'_-(x)$ . Tyto derivace spočítejte.

3. Vyšetřování extrémů funkce ( globálních i lokálních) a průběhu funkce:

a) vyšetřete lokální a globální extrémy funkce

i)  $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x-1}$  ; ii)  $f(x) = \exp(-\sqrt{|x^2 - 1|})$  ;

b) vyšetřete průběh funkce ( $\exp(x) = e^x$ ):

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 1}; \frac{|x|}{x^2 - 1}; \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|; \frac{x^3}{x^2 - 1}; \frac{1}{x} + 4x^2; \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$f(x) := x^2 e^{-x}; x e^{-x^2}; \frac{e^{-x}}{2-x}; e^{\frac{1}{x}}; \frac{1}{e^x} - x; (x-2) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \text{ nebo } |x-2| \cdot e^{-\frac{1}{x}};$$

$$\exp\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right); |x| e^{-|x-1|};$$

$$f(x) := x + \sin x; x - 2 \arctg x; \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right); \arctg \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$f(x) := x \ln x; x - \ln(x+1); \frac{x}{\ln x} .$$

4. Několik „slovních“ příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:

(můžete zkusit, pokud nebudete mít nic jiného na práci a bude se vám chtít toto řešit)

1. Na grafu funkce  $y = x^2$  najděte bod, nejbližší bodu  $A[6,3]$ .
2. Najděte válec daného objemu s nejmenším povrchem.
3. Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru máme vystříhnout, abychom složili krabíčku (bez víka) maximálního objemu?
4. Do koule daného poloměru  $R$  vepište válec maximálního objemu ( nebo s maximálním povrchem).
5. Jaký maximální objem může mít kužel, je-li dána jeho strana?
6. Do daného kuželu vepište válec ( tak, že základna válce je část základny kuželu) maximálního objemu.
7. Dešťová kapka s počáteční hmotností  $m_0$  padá volným pádem ( z dostatečné výšky) a přitom se vypařuje – hmotnost kapky v čase  $t$  je dána vztahem  $m(t) = m_0 - kt$ ,  $k > 0$ . Kdy bude mít kapka největší kinetickou energii?
- 8\*. V rovině je dán bod  $A[a,b]$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Kdy bude mít pravoúhlý trojúhelník  $OPQ$  ( $O$  je počátek s.s.,  $P$  leží na ose  $x$ ,  $Q$  leží na ose  $y$  a bod  $A$  je bodem přepony  $PQ$ ) nejmenší obsah?
- 9\*. Z chodby o šířce  $a$  kolmo odbočuje chodba o šířce  $b$ . S jak dlouhou tyčí ( zanedbatelného průřezu, nesenou vodorovně) je možné zatočit z chodby o šířce  $a$  do chodby o šířce  $b$ ?