

MAI 2 Příklady A2 - trojný integrál:

Vypočítejte integrály:

- $\iiint_D (x + y + z) dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$;
- $\iiint_D x dx dy dz$, kde oblast D je ohraničená rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a $x+y+z=1$;
- $\iiint_D y dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$;
- $\iiint_D z^2 dx dy dz$, kde oblast D je ohraničená
a) rovinou $z=0$ a plochou $z=9-x^2-y^2$; b) plochou $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=4$.
(válcové souřadnice)
- $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, kde $D = \{[x, y, z]; 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ (sférické souřadnice).

Aplikace trojného integrálu:

Trojným integrálem vypočítejte objem tělesa, ohraničeného

- rovinami $x=0$, $y=0$, $x=4$, $y=4$, $z=0$ a plochou $z=x^2+y^2+1$;
- rovinami $z=0$, $z=5$, $y=4$ a plochou $y=x^2$;
- rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
- rovinami $z=0$, $y=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$;
- rovinami $x=0$, $y=1$, $x+y=3$, $z=0$ a plochou $z=xy$;
- rovinou $z=0$ a plochami $z=4-y^2$ a $y=\frac{x^2}{2}$;
- plochou $z=x^2+y^2$ a rovinou $z=4$
- plochami $z=x^2+y^2$ a $x^2+y^2+z^2=6$.

„Fyzikální“ aplikace:

- Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$ a plochami $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2+1$,
je-li hustota h tělesa v bodě (x, y, z) přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od osy z .
- Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z=4$ a plochou $z=x^2+y^2$, je-li hustota h tělesa
v bodě (x, y, z) rovna a) $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $h(x, y, z) = z$.
- *. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k jeho ose .
- *. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa, ohraničeného rovinou $z=3$ a plochou $z=\sqrt{x^2+y^2}$
vzhledem k ose z .