MAI 2 Příklady na cvičení 1.4.2014 Určitý integrál Riemannův, resp. Newtonův .

---

1. Jednoduché integrály na začátek:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \; ; \; \int_0^3 |2x-1|\,dx \; ; \; \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \; ; \; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \; ; \; \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \; ; \; \int_0^\infty e^{-x}\,dx \; ; \; \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \; ; \; \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \; .$$

2. Výpočet R- integrálu integrací per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_0^1 x.arctgx\,dx \; ; \; \int_0^2 \frac{x}{1+x^4}\,dx \; ; \; \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx \; ; \; \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx \; ; \; \int_2^3 \frac{1}{x^2}.\ln\frac{1}{x}\,dx \; ;$$

pozor na substituci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}.\cos x\,dx \; ; \; \int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\sin x}\,dx \; ; \; \int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \; .$$

3. Integrál přes neomezený interval:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x.\ln^2 x}\,dx \; ; \; \int_2^\infty \frac{1}{x.\ln x}\,dx \; ; \; \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx \; ;$$

Vyšetřete konvergenci řady : $\sum_2^\infty \frac{1}{n.\ln n}$; $\sum_2^\infty \frac{1}{n.\ln^2 n}$.

4. Aplikace určitého integrálu:

a) Vypočítejte obsah rovinné oblasti ω, která je ohraničená

i) grafem funkce $y = x^2$ a přímkou $x + y = 2$;

ii) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x \cdot \sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$;

iii) obsah elipsy $\left\{ [x,y] ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$, $a > 0, b > 0$.

b) i) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω kolem osy x, kde oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y = x e^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

ii) objem koule o poloměru R.

c) Vypočítejte délku i) grafu funkce $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le a$;

ii) obvodu kružnice .

5. Užití věty o substituci a vlastností R- integrálu :

Ukažte, že platí :

i) je-li $f \in R(-a,a)$, $a > 0$, funkce lichá, pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

ii) je-li $f \in R(-a,a)$, $a > 0$, funkce sudá , pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;