

Diferenciál – další příklady jeho výpočtu a užití :

1. Je dána funkce a) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y}$; b) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$.

Najděte a načrtněte definiční obor funkce f , vypočítejte $\nabla f(x_0, y_0)$, ukažte, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ a najděte normálu ke grafu f v tomto bodě.

Vypočítejte přibližně (pomocí lineární aproximace) hodnotu $f(1,04; 3,008)$ v příkladu a) a $f(-0,04; 0,02)$ v příkladu b).

2. Jsou-li funkce $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, bod a je uvnitř D a funkce f, g mají v bodě a totální diferenciál, ukažte, že pak $d(fg)(a) = g(a) \cdot df(a) + f(a) \cdot dg(a)$ (asi pomůžte, když ukážete, že $\nabla(fg)(a) = g(a) \cdot \nabla f(a) + f(a) \cdot \nabla g(a)$).

3. Najděte „vzorec“ pro přibližné určení relativní chyby $(\frac{\Delta f}{f})$ výpočtu veličiny f , když

a) $f(u, v) = uv$; b) $f(u, v) = \frac{u}{v}$.

Zkuste určit relativní chybu (výpočtu) doby kmitu matematického kyvadla $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Derivace složené funkce více proměnných:

1. „Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla (jaké to jsou předpoklady?)

a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x, y) = x^y$.

b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.

c) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce g , je-li

(i) $g(x, y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x, y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x, y, z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$

d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x, y) = F(x, y, \varphi(x, y))$.

a užití :

2. Najděte funkci $f(x, y)$, která splňuje parciální diferenciální rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ pomocí transformace rovnice do polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

3. Najděte řešení $u(t, x)$ pro $t \geq 0$ a $x \in \mathbb{R}$ vlnové rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ($a > 0$) , které splňuje

počáteční podmínky $u(0, x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$, pomocí transformace

$\xi = x - at$, $\eta = x + at$.