

MAI – 6. a 7. cvičení (5.11. a 12.11.2013) - nekonečné posloupnosti .

1. Vypočítejte následující limity (nebo ukažte, že neexistují):

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} ; \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} ; \text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{n} ; \text{ d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^{20} \cdot (3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}} ;$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}} ; \text{ f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} ; \text{ g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} .$$

2. Víte-li, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} ; \text{ b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n ; \text{ c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n ; \text{ d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} .$$

3. Věta o limitě monotónní posloupnosti.

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$\text{(i) } a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) . \text{ Ukažte, že } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2} .$$

$$\text{(ii) } a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} . \text{ Ukažte, že } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 ;$$

b) Ukažte, že platí : je-li $0 \leq a_n$, pak posloupnost $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

c) Ukažte, že platí: Je-li $0 \leq a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$, potom, konverguje-li posloupnost $\left\{ \sum_{n=1}^N b_n \right\}$, pak také

$$\text{konverguje posloupnost } \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\} .$$

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti a) $\left\{ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot 2^n} \right\}$; b) $\left\{ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \right\}$; c) $\left\{ \sum_{n=1}^N \frac{2^n}{n!} \right\}$.

e) Ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$. (Návod: ukažte, že daná posloupnost není cauchyovská.)

4. Problémky:

Dokažte následující tvrzení :

a) Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in R$ a necht' platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

b) Necht' posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, $\{a_{n_k}\}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$ a necht'

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \text{ Potom také } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

c) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, a < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

d) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a, a < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Formulujte tvrzení analogická k tvrzením c) a d) pro nevlastní limitu $+\infty$.

e) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$, pak je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ ($a_n > 0$).

5. a) Užitím 4d) ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, x \in R$.

b) Spočítejte ($k \in N, |q| < 1$): i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k q^n$; ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$; iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

c) Ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

6. Ještě „aritmetika“ limit:

a) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, co lze říci o $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$? Tvrzení dokažte.

Na příkladech ukažte, že nelze formulovat žádné pravidlo pro součet v případě, že $a = \infty$ a $b = -\infty$.

Co lze říci (a co nelze) pro $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$?

b) Spočítejte limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + \sin n! + n!}{n^3 + 2n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!}.$$

7. Spočítejte limity:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right).$$

8. Cauchyovské posloupnosti :

a) Opakování definice : ukažte dle definice, že posloupnost $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ je cauchyovská.

b) Necht' posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská, $\{a_{n_k}\}$ je posloupnost vybraná z $\{a_n\}$ a necht' $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, potom také $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dokažte.

c) Ukažte, že neklesající, shora omezená posloupnost je cauchyovská.