MAI 1– 4.cvičení (23.10.2014) - nekonečné posloupnosti .

Zopakujte si:

(i) definici posloupnosti reálných čísel, co znamená, že posloupnost je monotonní, resp. omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená;

(ii) definici vlastní, resp, nevlastní limity posloupnosti;

Příklady a problémky:

1. Definice limity posloupnosti.

1. Mějme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 0{,}9$, $a_2 = 0{,}99$, $a_3 = 0{,}999$,....... Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

   Najděte, oč se liší člen a_n od 1.

2. Dokažte z definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

3. Dokažte, že platí: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

4. Dokažte dle definice limity, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Užijte pak také vět pro výpočet limit.

5. Ukažte, že platí :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $q \in (-1,1)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pro $q \in (1,\infty)$, pro $q \le -1$ posloupnost $\{q^n\}$ limitu nemá ;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ pro $x \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Dokažte, že platí: má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu *a*, má každá vybraná posloupnost tutéž limitu.

7. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $b_n = (-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (užijte 6.) .

8. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, $n \in N$, nemá limitu.

9. Dokažte následující tvrzení :

   a) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ posloupnost $\{a_n\}$je omezená ;

   b) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní $\Rightarrow$ posloupnost $\{a_n\}$je cauchyovská ;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$je omezená $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$;

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

10. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = a$;

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$;

    c) nechť $\{a_n\}$a $\{b_n\}$jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\exists n_0 \in N \, \forall n > n_0 : a_n < b_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

    d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \exists n_0 \in N \, \forall n > n_0 : a_n < b_n$.

2. Věty o limitách.

1. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n-14}{2n^2-n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{4^n+3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+n!}{-2^n+3\cdot n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n-2n!}{n^4+3n^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2+1}-n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}-(-1)^n n^2}{3n^2+\sqrt[3]{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

2. Ukažte, že platí : $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} q^n=\dfrac{1}{1-q} \Leftrightarrow q\in(-1,1)$.

3. Ukažte, že platí : $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\in R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

4. Vyšetřete existenci limity ($n\in N$) (lze užít tvrzení v 6. z první části úloh) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}$.

5. Dokažte větu o limitě sevřené posloupnosti. Modifikujte tuto větu i pro nevlastní limity.

6. Pomocí vět v příkladu 5. dokažte :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n=0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos nx=0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sin n)=\infty$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n)=\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

7. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\dots\dots\dots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

8. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\dots\dots\dfrac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.