

MAI 1 - 10. a 11. cvičení - neurčitý integrál 1.

Příklady pro cvičení „počítání“ integrálů :

najděte primitivní funkce na maximálních intervalech (tyto intervaly je „dobré“ vždy udávat).

Poznámka k zadání příkladů:

Integrály jsou zde rozděleny do skupin podle podobného „charakteru“ integrálu, s návodem, jaký nástroj pro výpočet si můžeme zvolit – zároveň s počítáním integrálů tak trénujeme i to, jak poznat, který z nástrojů pro výpočet máme použít, a to je při výpočtu integrálů asi to „nejdůležitější“ (snad podobné je to u počítání limit). A příkladů je v každé části „více“, abyste také mohli integrály srovnávat, ale pro počítání stačí pak si některé integrály vybrat.

Navíc, u výpočtu integrálů si můžete udělat zkoušku (a zároveň si tak opakovat derivování) – dle definice:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ v intervalu } I = (a, b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), x \in (a, b) .$$

1. Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce :

a) Užití tabulky primitivních funkcí a výpočet integrálu násobku funkce a součtu funkcí:

$$\int \left(3e^x + \frac{1}{x}\right) dx ; \int \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx ; \int (\sqrt[3]{x} + x^5) dx ; \int \frac{x^3 - 1}{2x} dx ; \int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}} dv ;$$
$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx ; \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx ; \int \operatorname{tg}^2 u du .$$

b) Asi užitečný „návod“ pro výpočet integrálů „tahákových“ funkcí, složených s funkcí lineární:

Je-li $\int f(x) dx = F(x) + C$ na intervalu I , pak, na odpovídajícím intervalu je

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a > 0 :$$

$$\int e^{-x} dx ; \int \cos(3x + 2) dx ; \int 4^x dx ;$$

$$\int (3x - 2)^6 dx ; \int \sqrt{3x - 2} dx ; \int \sqrt[3]{1 - 2x} dx ; \int \sqrt[3]{(1 - 2x)^2} dx ; \int \frac{1}{5 - x} dx ; \int \frac{1}{(3x + 1)^5} dx ;$$

$$\int \frac{1}{4 + x} dx ; \int \frac{1}{4 + x^2} dx ; \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx ; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx ;$$

$$\int \sin^2 x dx ; \int \cos^2 x dx \quad (\text{zde se dají „chytře“ použít „známé“ vzorce } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\text{a } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}).$$

2. Věta o substituci (často se tato věta nazývá 1. věta o substituci):

Nechť : (i) funkce f má na intervalu (a, b) primitivní funkci F (nebo-li $\int f(t) dt = F(t) + C$ na (a, b))

a (ii) funkce g je definovaná na intervalu (α, β) , $g(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ a g má vlastní derivaci v každém bodě z (α, β) .

Pak
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \text{ na } (\alpha, \beta).$$

$$\int 2xe^{x^2} dx ; \int 2xe^{-x^2} dx ; \int x \sin(x^2) dx ; \int x^2 \cos(x^3) dx ; \int x\sqrt{1-x^2} dx ; \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}} dx ;$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx ; \int e^x \sin(e^x) dx ; (*) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^3} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) dx ; \int \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x}) dx ; \int \cos x \cdot \exp(\sin x) dx ;$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx ; \int \frac{\ln^2 x}{x} dx ; \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} dx \quad \int \frac{\ln x}{x \cdot (1 + \ln^4 x)} dx \quad (\text{stejně i } \int \frac{x}{1+x^4} dx) ;$$

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx ; \int \sin^3 x dx ; (*) \int \frac{1}{\sin x} dx ; (*) \int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx ;$$

Spec. $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C$ na intervalu, kde je $g(x) \neq 0$:

$$\int \frac{2x}{4+x^2} dx ; \int \frac{x^3}{1+x^4} dx ; \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx ; \int \frac{x-3}{x^2+4x+5} dx ; \int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx ;$$

$$\int \frac{\sin x}{5 + \cos x} dx ; \int \operatorname{tg} x dx ; \int \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx ; \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln^2 x)} dx.$$

3. Integrace „per partes“ :

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu (a, b) , a je-li F primitivní funkce k f na (a, b) a G primitivní funkce ke g na (a, b) , potom na (a, b) platí:

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

nebo jiná (často užívaná) „verze“ věty o integraci per partes:

Jsou-li funkce u' a v' spojité na intervalu (a, b) , pak na (a, b) platí:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

a) $\int x \sin x dx ; \int x^2 \cos x dx ; \int x^3 \ln x dx ; \int x \ln^2 x dx ; \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx ;$

b) $\int \ln x dx ; \int \ln^2 x dx ; \int \frac{1}{x} \ln x dx ;$

c) $\int \sin^2 x dx ; \int \cos^2 x dx ; \int e^x (\sin x + \cos x) dx ; \int \sqrt{1-x^2} dx ;$

d) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx ; \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 3 ;$