MA 2 – Dvojný a trojný integrál

(několik příkladů bez užití substituce)

1. $\int\limits_{\omega} e^{x+y}\,dx\,dy$, kde $\omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

2. $\int\limits_{\omega} f(x).g(y)\,dx\,dy$, kde $\omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$

3. $\int\limits_{\omega} \frac{y}{x+y^2}\,dx\,dy$, kde $\omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle$

4. $\int\limits_{\omega} (x-y)\,dx\,dy$, kde $\omega \subset R^2$ je oblast, ohraničená přímkami $y=x$, $y=0$ a $x+y=2$.

5. $\int\limits_{\omega} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kde $\omega = \{[x,y];\ x \leqq 2,\ y \leq x \leq 2y\}$

6. $\int\limits_{\omega} xy^2\,dx\,dy$, kde $\omega = \{[x,y];\ x^2+y^2-1 \leq 0 \wedge x+y-1 \geq 0\}$

   (zkuste obě pořadí integrace)

7. $\int\limits_{\omega} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, kde $\omega \subset R^2$ je oblast, ohraničená křivkami $x=0$, $y=1$, $y=2$ a $y^2=x$.

8. $\int\limits_{\omega} x\,dx\,dy$, kde $\omega = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leq r^2,\ r>0\}$.

9. $\int\limits_{\omega} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, kde $\omega \subset R^2$ je ohraničená křivkami $xy=1$, $y=x$, $x=2$.

10. Změňte pořadí integrace:

a) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx$; b) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy$;

c) $\int_{-3}^{0} dx \int_{-x}^{2} f(x,y)\,dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x,y)\,dy$;

11. Určete meze pro integraci (pomocí Fubiniovy věty) $\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$, je-li $\omega \subset R^2$ ohraničená křivkami:

a) $y = x^2$, $y = 2 - x$;

b) $y = x^2$, $y^2 = x$;

c) $y = \frac{4}{x}$, $y = x$, $x = 3$;

nebo $\omega = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le r^2\}$

Spočítejte $\iint_\omega dx\,dy$ (míra oblasti ω)

12. Spočítejte objem oblasti $\Omega \subset R^3$, která je ohraničena plochami:

a) $z=0$, $x+y+z=2$, $y=x^2$;

b) $z=0$, $x+y+z=2$, $y=x^2$ a $y=0$;

c) $x=0$, $y=1$, $z=0$, $y=2x-x^2$, $z=2xy$;

d) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

e) $z=0$, $z=4-y^2$, $y=\frac{x^2}{2}$.

13. $\int\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$, je-li $\Omega \subset R^3$ oblast, ohraničená rovinami
$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

14. $\int\limits_{\Omega} z^2\,dx\,dy\,dz$, kde $\Omega \subset R^3$ je oblast, ohraničená plochami
$z=0$ a $z=4-x^2-y^2$.

15. $\int\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$, kde $\Omega \subset R^3$ je ohraničené plochami $z=4$
a $x^2+y^2=z^2$.

16. Spočítejte objem (tělesa) $\Omega \subset R^3$, je-li

a) Ω ohraničená rovinami $z=0, z=x$ a plochou $x^2+y^2=r^2, r>0$;

b) $\Omega = \{(x,y,z);\ 0 \le z \le 2-x-y,\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$

c) $\Omega = \{(x,y,z);\ 0 \le z,\ x+y+z \le 1,\ z \le xy,\ x \ge 0, y \ge 0\}$

d) $\Omega = \{(x,y,z);\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4-x-y\}$

(tj. Ω je ohraničená plochami $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ a $x+y+z=4$).

17. Buď $f \in C^1(\omega)$, kde $\omega \subset R^2$ je měřitelná oblast (uzavřená). Ukažte, že velikost plošného obsahu plochy, dané jako graf fce f v oblasti ω je dána integrálem:

$$\int\limits_{\omega} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,dx\,dy.$$