Matematika A1 – „písemné" cvičení 3.

(řešení příkladů, vybraných původně pro „naše" 2. cvičení)

III. Funkce – opakování elementárních funkcí:

Připomeneme si „jednoduché" funkce (známé ze střední školy), jejich základní vlastnosti, jejich „znázornění" pomocí grafů. K tomu je „užitečné" udělat si vlastní „tahák" základních funkcí („tabulku") a používat ho, bude-li při řešení některých úloh potřebovat pomoc).

Měli byste „dobře" znát funkce:

$f(x) = :\ x^n,\ \sqrt[n]{x}\ (n \in N);\ \frac{1}{x}$ (užitečná bude i $\frac{1}{x^2}$);

e^x (i $a^x, a>0$), $\ln x$ (přirozený logaritmus) i $\log_a x$ $(a>0)$;

goniometrické funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.

„Složitější" funkce můžeme pak vytvořit (jsou-li funkce f, g definované na $M \subset R$)

sčítáním: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in M$;

násobením: $(f \cdot g)(x) = f(x) . g(x)$, $x \in M$;

dělením: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $x \in M$;

dále je užitečná i absolutní hodnota funkce

$$|f|(x) = |f(x)| \ (= f(x) . \operatorname{sgn} x), \quad x \in R$$

a funkce složená:
mějme funkce $g: Dg \subset R \to R$, $f: Df \subset R \to R$, a nechť pro $x \in M \subset Dg$ je $g(x) \in Df$; pak funkce
$h(x) = f(g(x))$ (také se někdy značí $h(x) = (f \circ g)(x)$)
se nazývá funkcí složenou, f je t.zv. funkce „vnější“, g je t.zv. funkce vnitřní.

Symbolem Df značíme definiční obor funkce f, t.j. množinu všech reálných čísel, pro které existuje hodnota funkce $f(x)$“, také se říká – „kde je funkce f „definovaná“.

<u>Příklady a jejich řešení:</u>

1. <u>Definiční obory funkcí</u> (složených z elementárních „známých“ funkcí) – <u>pozor musíme dávat na zlomky, sudé odmocniny a na funkci $\ln x$</u> !

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

Tato funkce f je funkce složená – vnější funkce je odmocnina – označme $h(y) = \sqrt{y}$, vnitřní funkce je $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ (lineární lomená); a tedy
$h(y) = \sqrt{y}$ je definována pro $y \geq 0$ („takáková informace – budu značit „T“)

. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ je definována pro všechna $x \in R$, $x \neq 2$
$(x-2 \neq 0)$

<u>Tedy „dohromady“</u> $\left(y = \dfrac{x+1}{x-2}\right)$

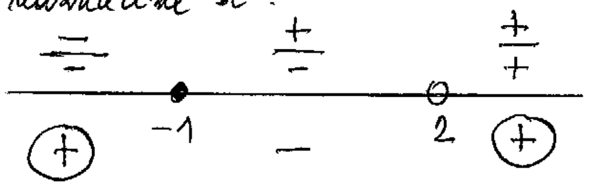
$$Df = \left\{ x \in R;\ x-2 \neq 0 \ \wedge\ \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \right\}$$

„Musíme" tedy řešit nerovnici $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ (opakovali jsme minule):

Jednodušší asi takto (připomenutí minulého cvičení):

zlomek $\frac{x+1}{x-2}$ mění znaménko jen v bodech, kde se anulují čitatel, resp. jmenovatel, tj. pro $x=-1$, $x=2$ ($\notin Df$);

naznačíme si:



, a tedy

$$Df = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty)$$

A kdyby $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$,

pak vnější funkce $h(y)=\ln y$ má definiční obor $(0,+\infty)$, tedy zde

$$Df = \left\{x\in R;\ x\neq 2 \wedge \frac{x+1}{x-2}>0\right\} = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

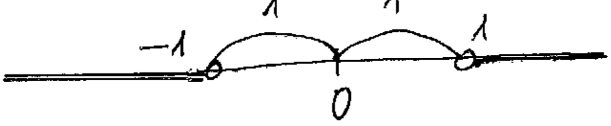
(ii) $f(x) = \ln(x^2-1)$

opět – funkce $f(x)$ je složená, vnější funkce je $h(y)=\ln y$, vnitřní $g(x)=x^2-1$; tedy ($g(x)$ je definována „všude")

$$Df = \{x\in R;\ x^2-1>0\} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

A zde „musíme" řešit nerovnici $x^2-1>0$, tj. (zkusíme s „odmocněním"): $x^2>1 \quad |\sqrt{\ }$

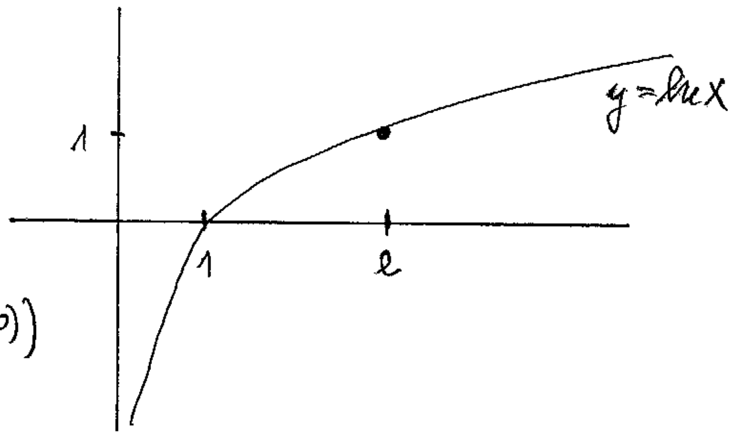
a tedy $|x|>1 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$



(užili jsme definici $|x|$ pomocí vzdálenosti – viz opakování v 1. cvičení) a, $f(x) = \ln(\ln x - 1)$:

$\mathcal{D}f = \{ x \in R ;\ \ln x - 1 > 0 \} = (e, +\infty)$

neboť:
$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$
a z vlastností funkce $\ln x$
($\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ a
$\ln x$ je funkce rostoucí v $(0, +\infty)$)
plyne, že $\ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$



(iii) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ $\quad (= h(g(x)))$

– opět složená funkce, vnější funkce $h(y) = \sqrt{y}$ je definovaná v $\langle 0, +\infty)$, vnitřní funkce $\cos x = g(x)$ je definovaná v R, tedy,

$$\mathcal{D}f = \{ x \in R ;\ \cos x \geq 0 \} = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

(zde $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ nebo $\bigcup\limits_{k \in Z} A_k$ značí sjednocení nekonečně mnoha množin $A_n, n \in N$, či $A_k, k \in Z$)

$f(x) = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$ je definovaná v R, tj. $\mathcal{D}f = R$,
neboť $\mathcal{D}f = \{ x \in R ;\ 1 - (\sin x)^2 \geq 0 \}$, ale
protože $-1 \leq \sin x \leq 1$ pro všechna $x \in R$, je $(\sin x)^2 \leq 1$ v R,
a tedy i $1 - (\sin x)^2 \geq 0$.

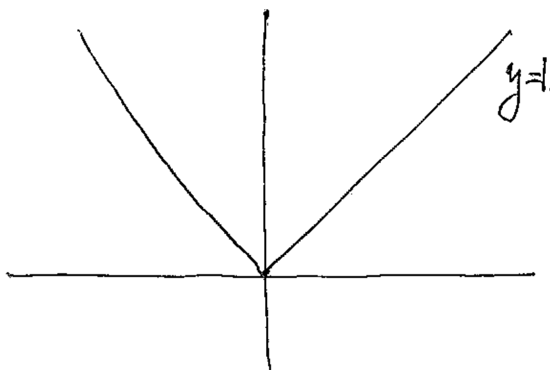
$\underline{f(x) = \ln(\sin x)}$

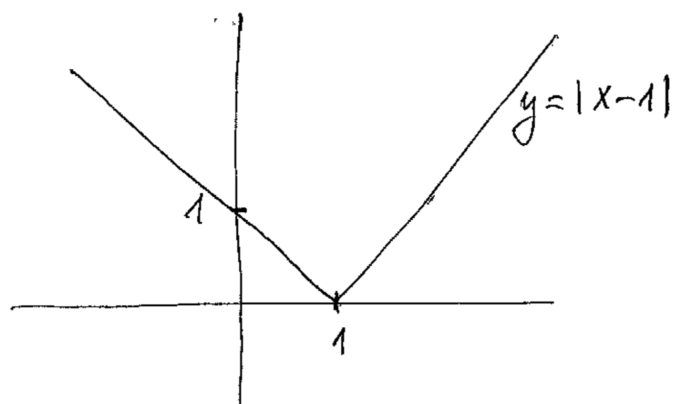
$$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R};\ \sin x > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi).$$

2. <u>Máme načrtnout grafy funkcí</u>, které jsou „příbuzné" s některou ze základních „známých" funkcí, a tím si připomenout jednak tyto základní funkce, a i to, jak „získat" grafy, známe-li graf funkce $y=f(x)$, také funkcí $y=f(x)+c$, $y=f(x+c)$, $y=cf(x)$ $(c \in \mathbb{R})$, a třeba i funkcí $y=|f(x)|$, $y=af(x+b)+c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ a podobně.

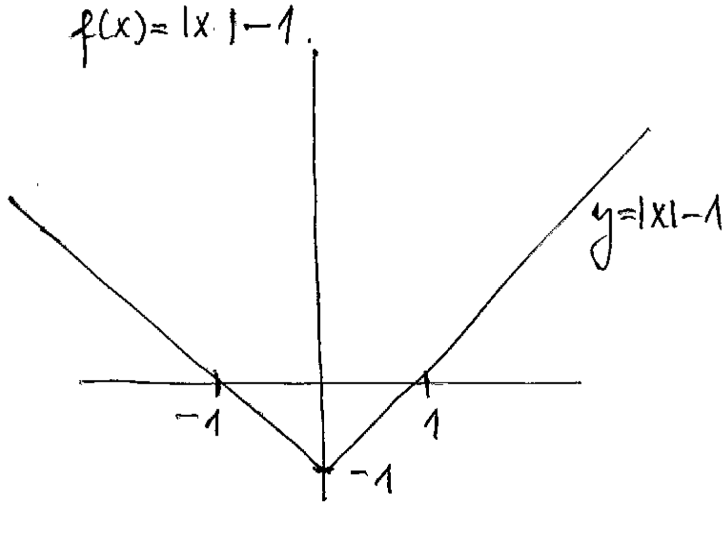
Dále budou asi trochu „neumělé" náčrtky – omlouvám se:

a) $\underline{f(x)=|x|}$ („základní") $\longrightarrow$ $\underline{f(x)=|x-1|}$



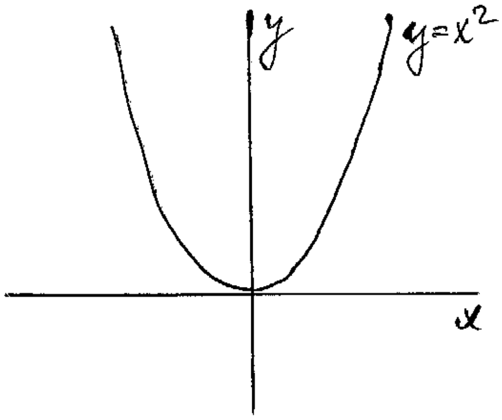


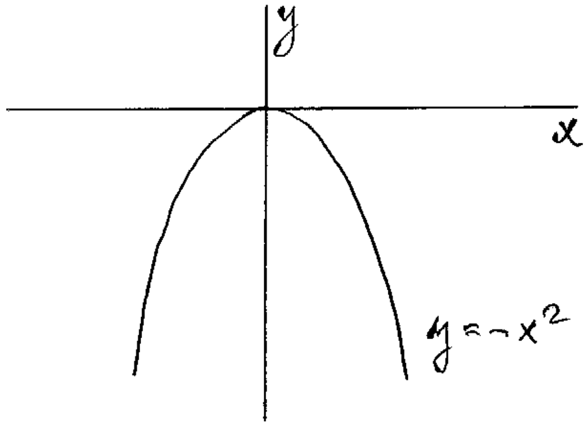
$f(x)=|x|-1$.



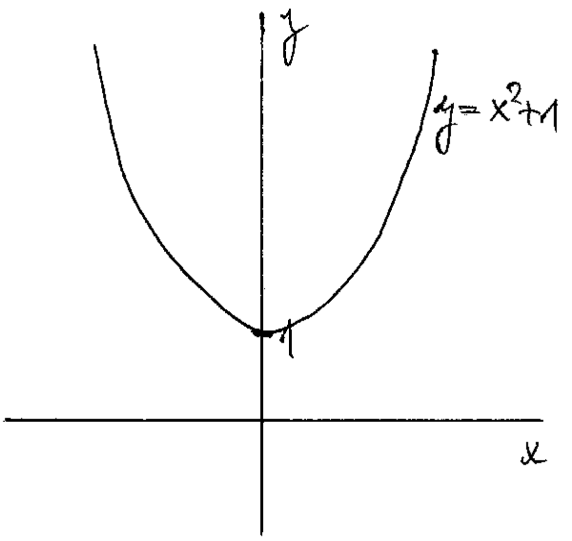
$f(x)=|-x|$, zde ale $|x|=|-x|$, tj. graf je „na začátku".

b) $f(x) = x^2$ (základní) $\longrightarrow$ $f(x) = -x^2$ ($\mathcal{D}f = \mathbb{R}$)

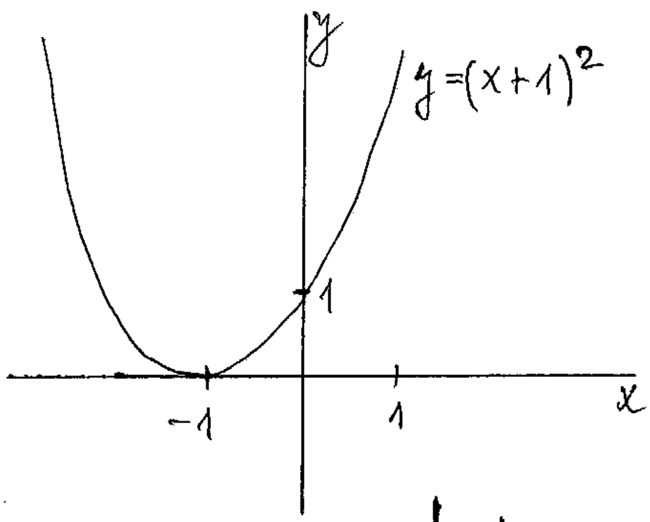




$f(x) = x^2+1$



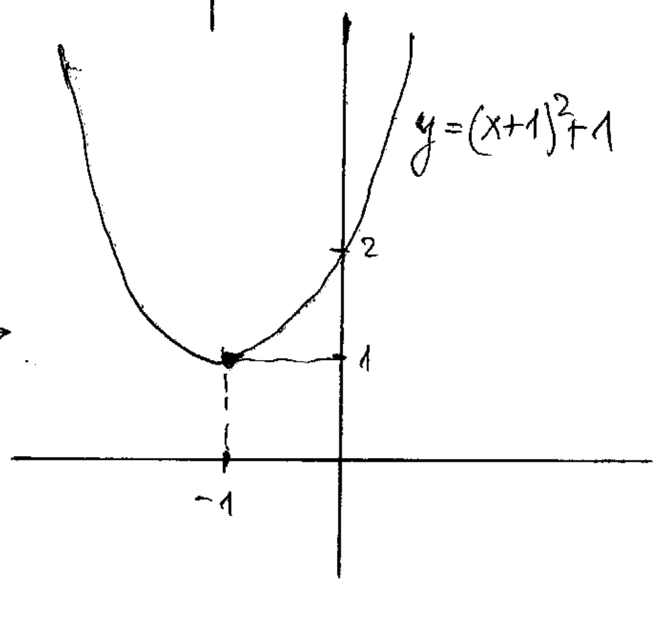
$f(x) = (x+1)^2$



$f(x) = x^2+2x+2$, tuto funkci můžeme úpravou („doplnění na čtverec") napsat i

$f(x) = (x+1)^2+1$, tedy graf →

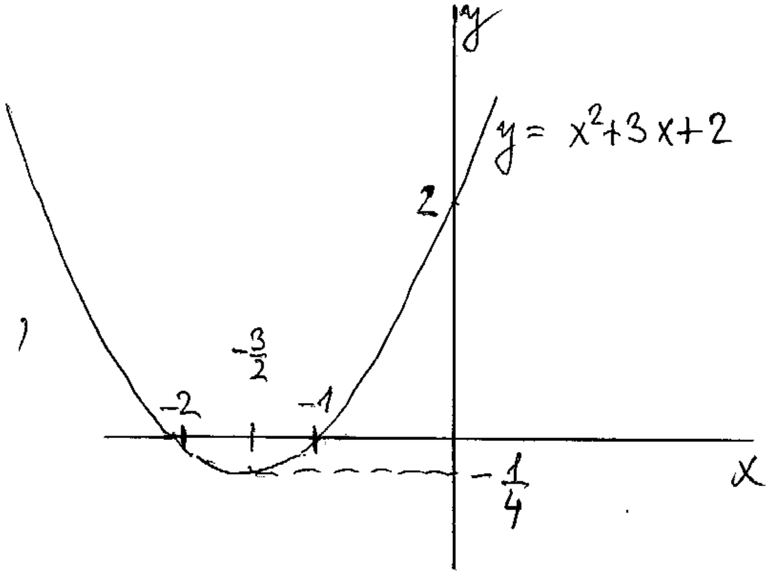
(„dohromady" posun o 1 „doleva" a o 1 „nahoru")



$f(x) = x^2+3x+2$

graf je opět parabola
(f je funkce kvadratická),
nulové body f jsou $x=-2$ a $x=-1$,
($f(x) = (x+2)(x+1)$)
vrchol je tedy v bodě $x = -\frac{3}{2}$,
$V[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$
(což lze vidět z doplnění na čtverec:

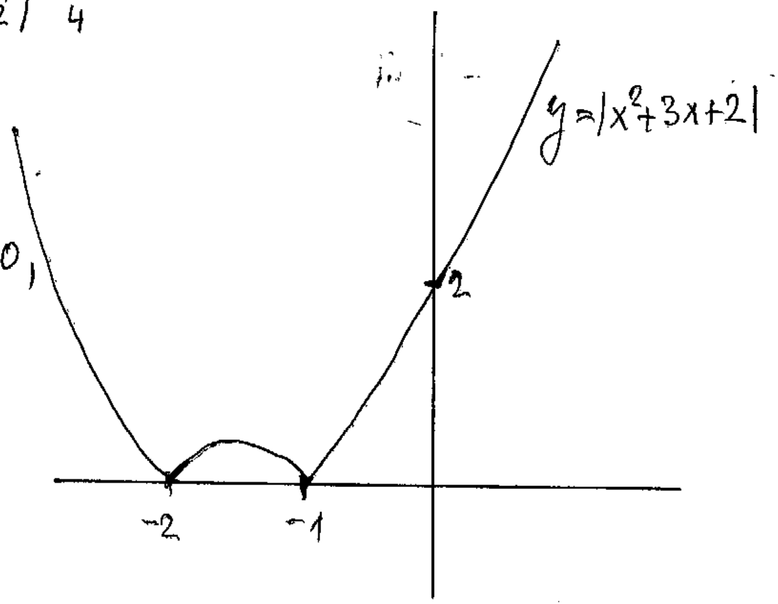
$$x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



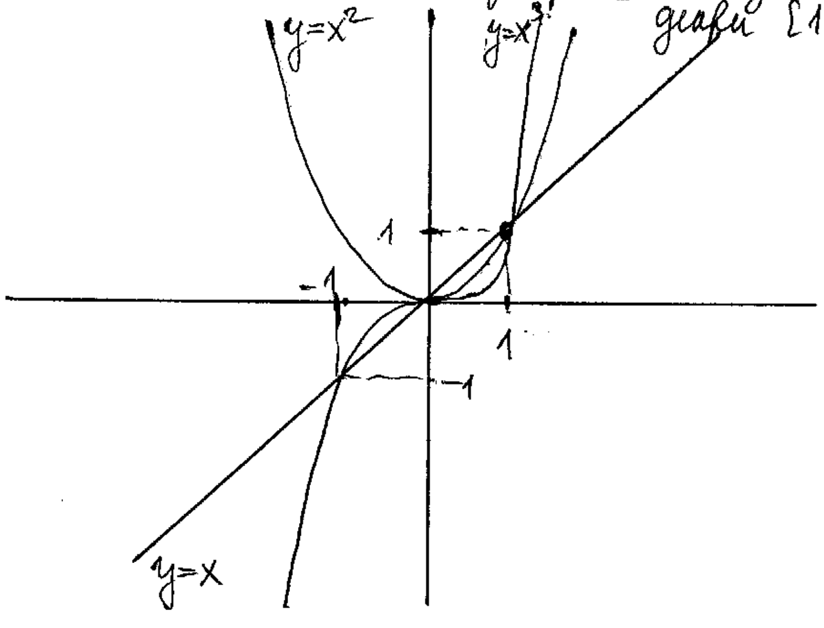
a $f(x) = |x^2+3x+2|$:

pro $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle -1, +\infty)$ je $f(x) \geq 0$,
tj. $|f(x)| = f(x)$

a pro $x \in (-2, -1)$ je $f(x) < 0$,
tj. $|f(x)| = -f(x)$

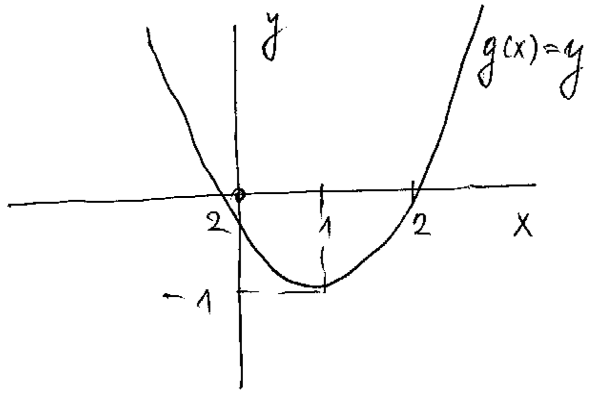


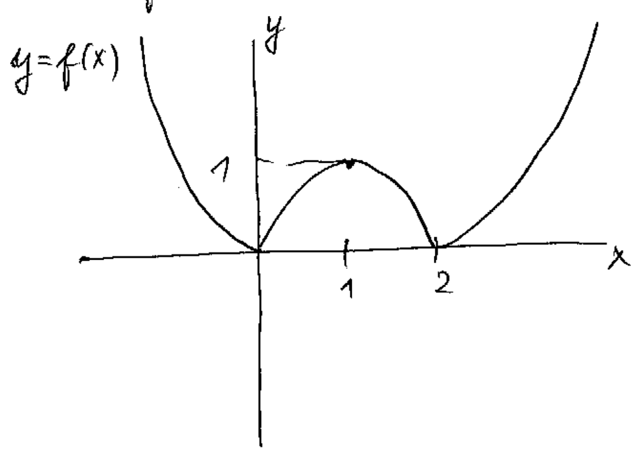
a funkce $f(x) = $: x, x^2, x^3 v jednom grafu: (všechny mají společný bod grafu $[1,1]$)



a navíc $f(x)=||x-1|^2-1|$:

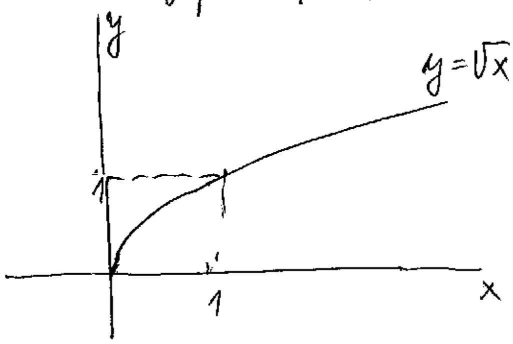
nejprve $g(x)=(x-1)^2-1$ $(=x^2-2x)$ $\longrightarrow$ $f(x)=||x-1|^2-1|$



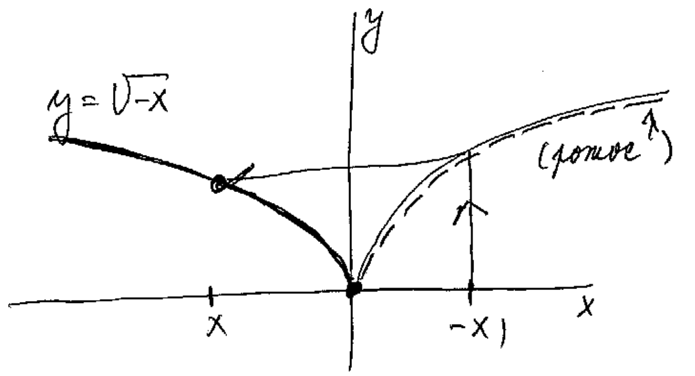


c) $f(x)=\sqrt{x}$ (základní)

$D_f=\langle 0,+\infty)$

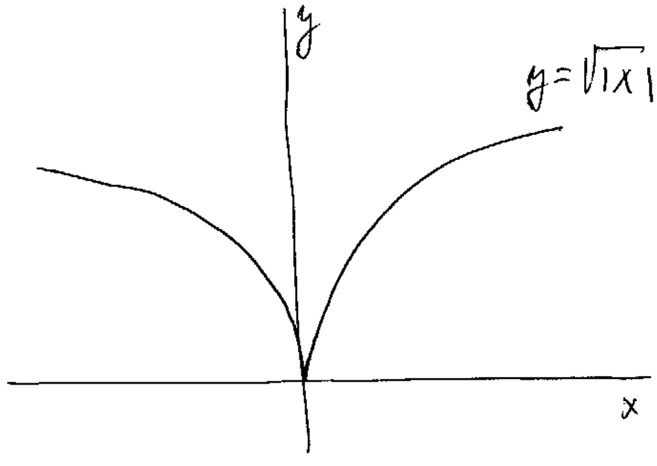


$f(x)=\sqrt{-x}$, $D_f=(-\infty,0\rangle$

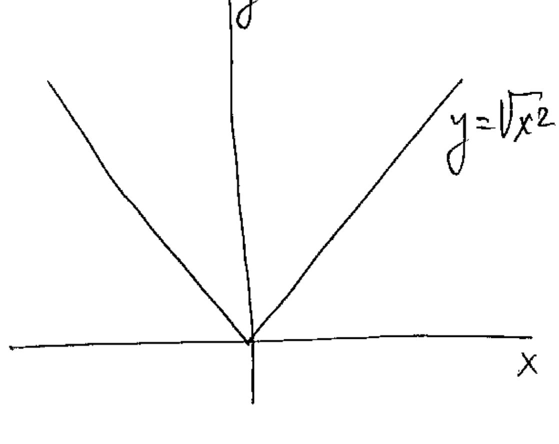


(pro $x\in(-\infty,0\rangle$ je $-x\in\langle 0,+\infty)$ a použiji tedy graf $\sqrt{x}$)

$f(x)=\sqrt{|x|}$, $D_f=\mathbb{R}$,
fce sudá, pro $x\in\langle 0,+\infty)$ je $f(x)=\sqrt{x}$

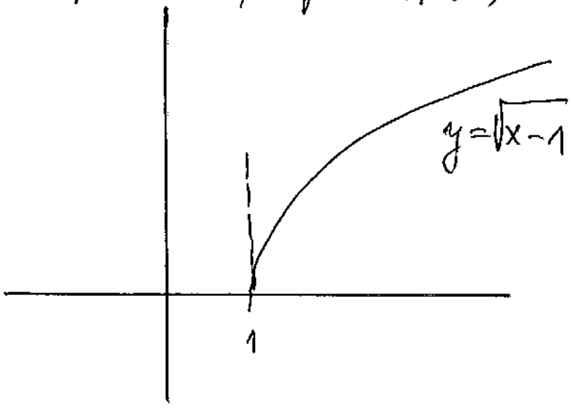


$f(x)=\sqrt{x^2}$ $(=|x|)$!
(už bylo)



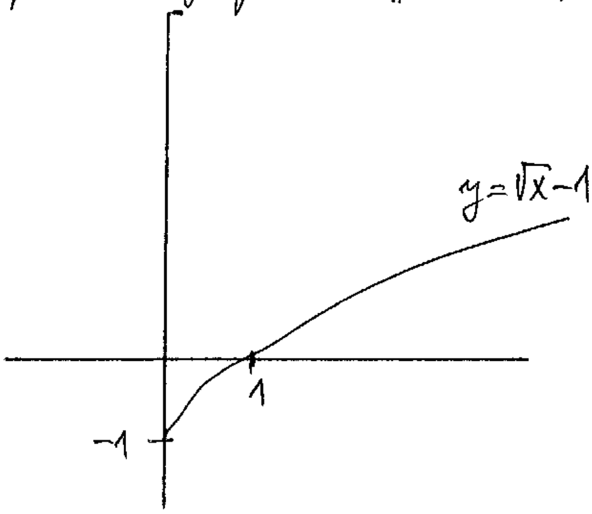
$f(x) = \sqrt{x-1}$

(posunutí graf $\sqrt{x}$ o „1" vpravo), $D_f = \langle 1, +\infty)$



$f(x) = \sqrt{x} - 1$, $D_f = \langle 0, +\infty)$

(posunutí graf $\sqrt{x}$ o „1" dolů)

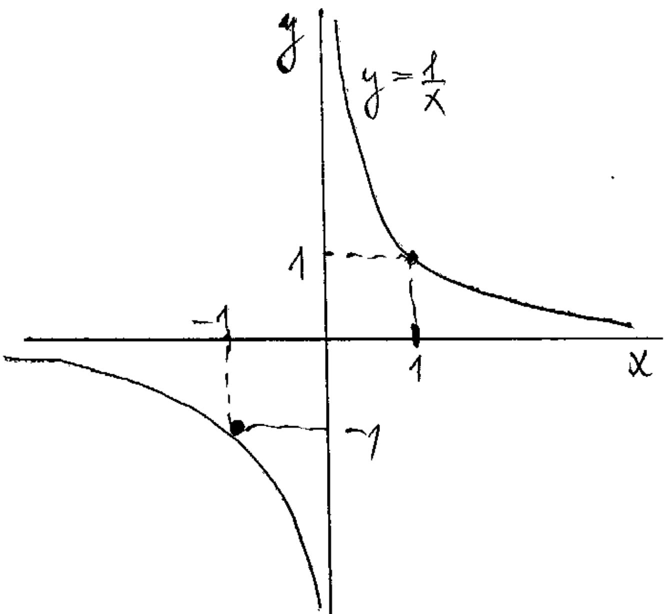


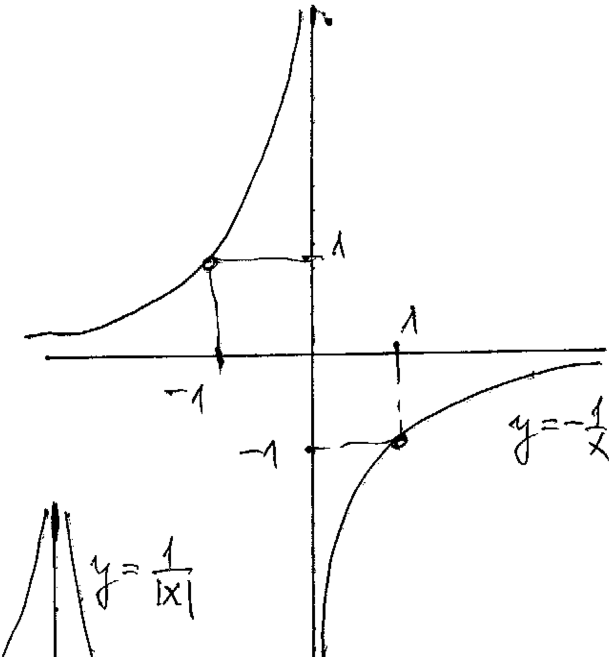
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ (základní)

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, fce lichá

(grafem je hyperbola)

$\longrightarrow$ $f(x) = -\frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

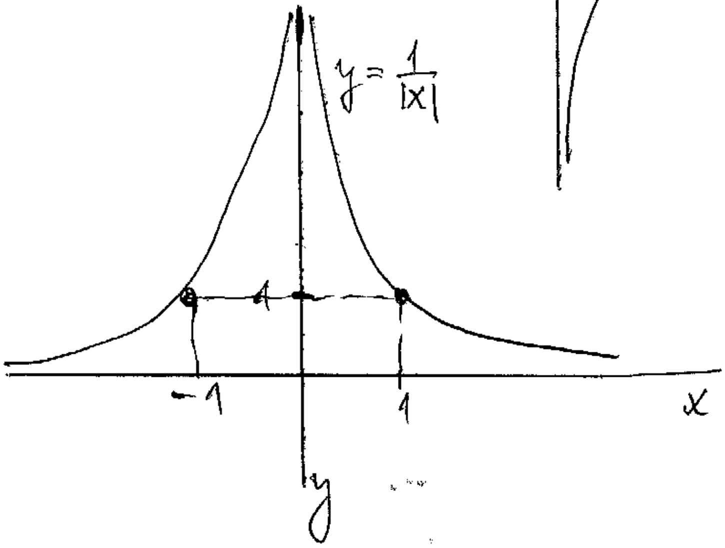




$f(x) = \frac{1}{|x|}$:

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(funkce sudá)

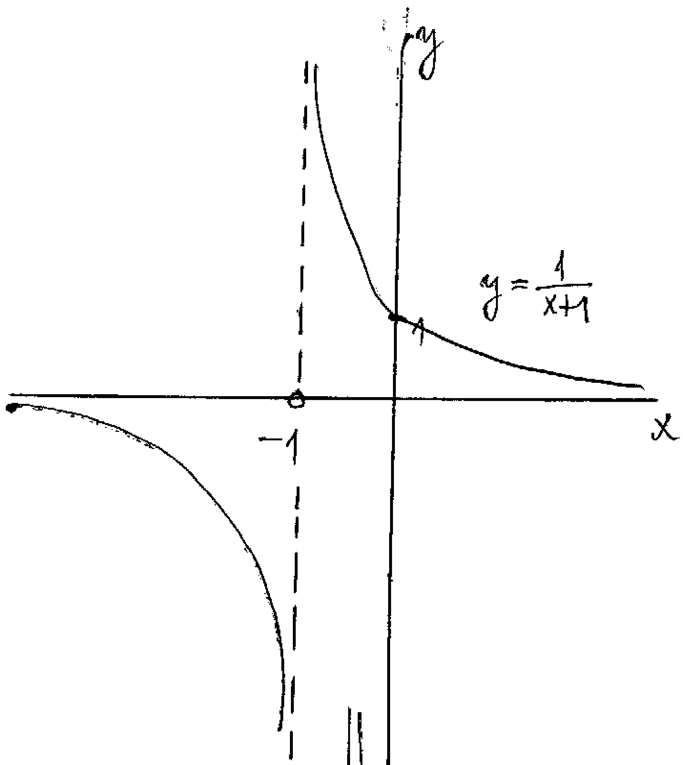


$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$x+1 \neq 0$, $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

posunutý graf $\frac{1}{x}$

o „1" vlevo $\quad (f(0)=1)$



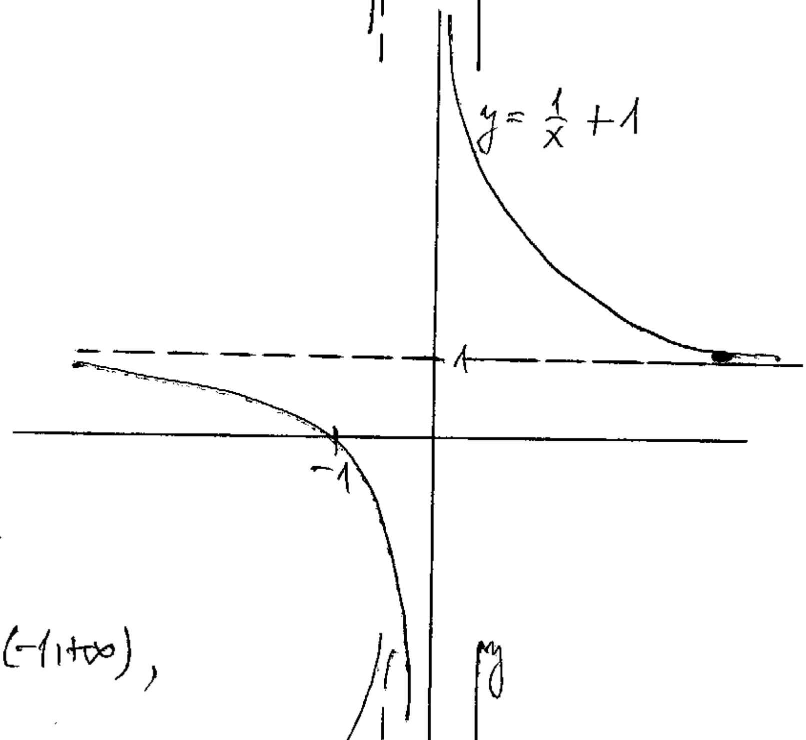
$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$x \neq 0$, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

posunutý graf $\frac{1}{x}$ o „1"

nahoru $\quad (f(0)=1)$

a $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$



$f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, $\quad D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$,

a upravíme na

$f(x) = \dfrac{x+1-3}{x+1}$, tj.

$$f(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{x+1}$$

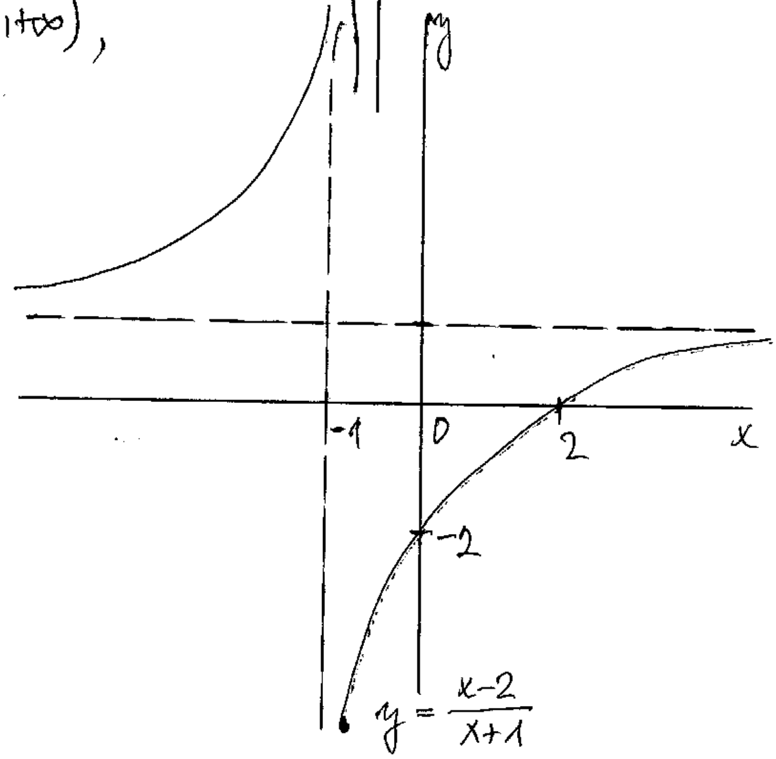
graf – „návod":

graf $-\frac{1}{x}$ posuneme o „1" vlevo,

„znetšíme" 3x a posuneme

o „1" nahoru, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f(0)=-2$

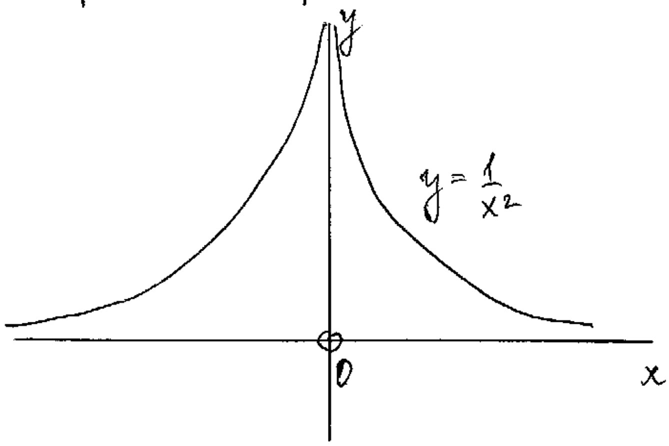


e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (základní) $\longrightarrow$ $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $f(x)>0$,

$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

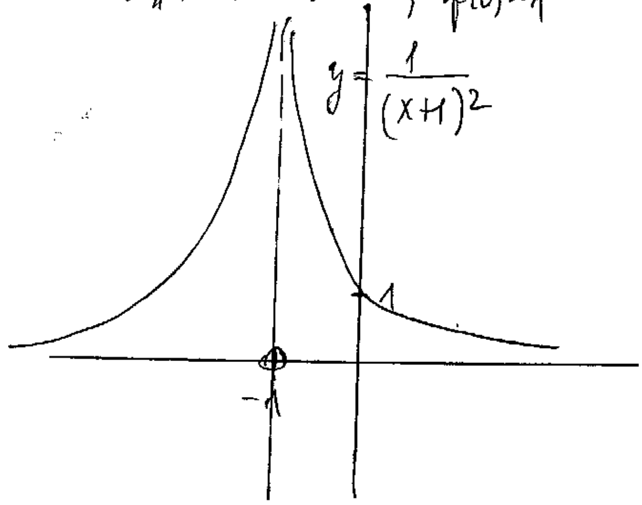
f je funkce sudá $\left(\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-x)^2}\right)$

$f(x)>0$ v D_f



$D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,

graf – posunutí grafu $\frac{1}{x^2}$ o „1" vlevo, $f(0)=1$

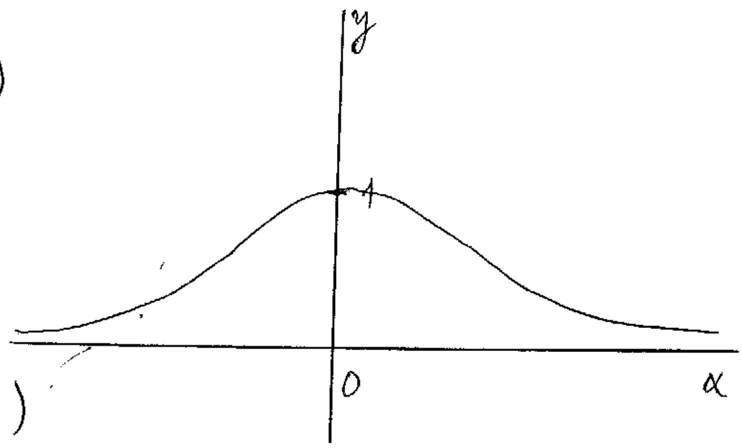


ale – $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (*) (zkuste)

$D_f=R$, $f(x)>0$, ale není „příbuzná" s funkcí $\frac{1}{x^2}$!

f je sudá (aspoň), $f(0)=1$

(nepovinné, užitečné zde budou limity)



a $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (*) (zkuste)

$D_f=R\setminus\{1,-1\}=$

$=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$,

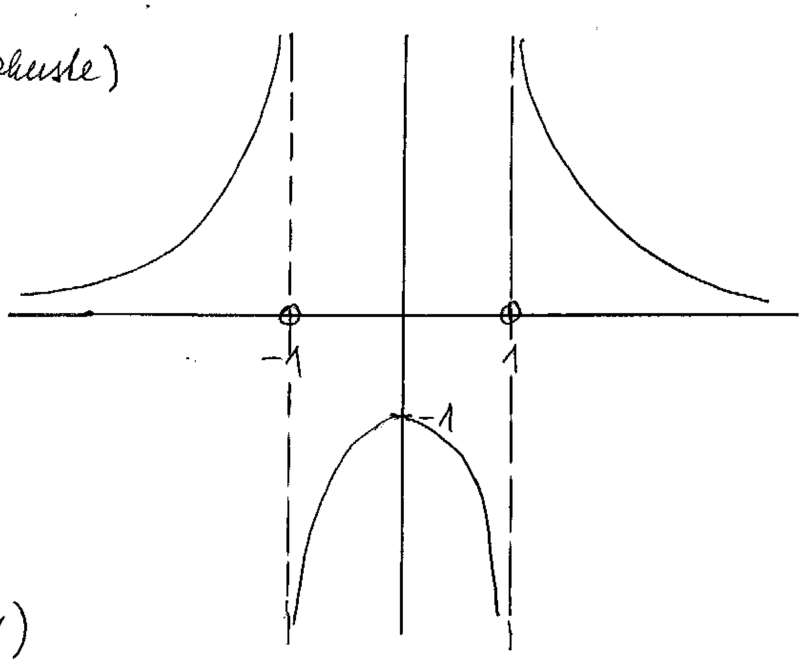
f je funkce sudá, $f(0)=-1$,

$f\neq 0$ v D_f, a

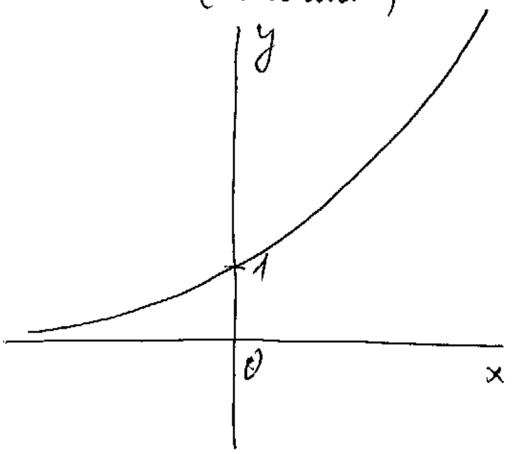
$f(x)>0$ pro $|x|>1$ $(x^2>1)$

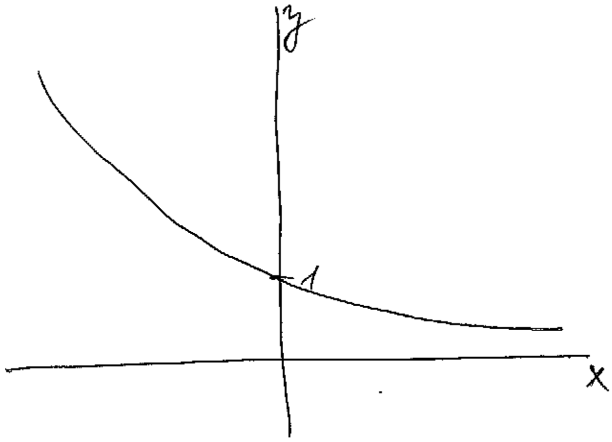
a $f(x)<0$ pro $|x|<1$ $(x^2<1)$

(opět – zde budou užitečné limity)

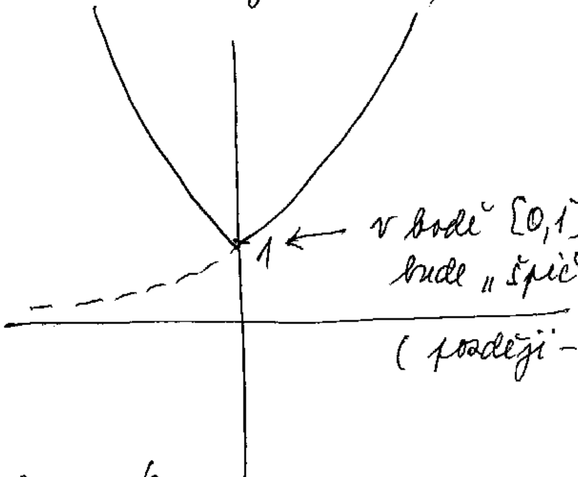


něco z f) $f(x)=e^{x}$, $D_f=R$ (základní) $\rightarrow$ $f(x)=e^{-x}$, $D_f=R$



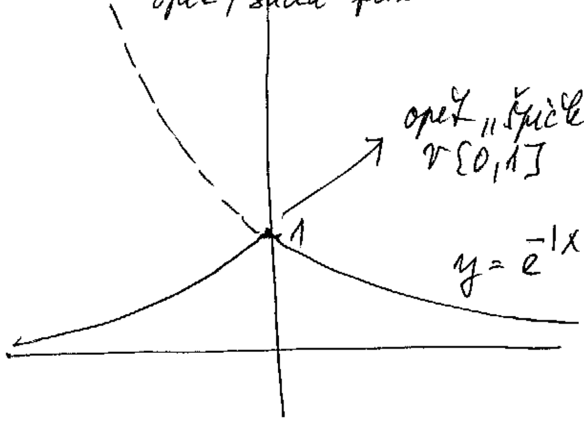


$f(x)=e^{|x|}$, $D_f=R$ (a $f(x)=e^{x}$ pro $x\geq 0$, navíc je sudá) a $f(x)=e^{-|x|}$, $D_f=R$ (a pro $x\geq 0$ je $f(x)=e^{-x}$) opět, sudá funkce



v bodě [0,1] grafu bude „špička"

(později – u derivací)



opět „špička") v [0,1]

$y=e^{-|x|}$

a navíc

a $f(x)=e^{-x^2}$ („důležitá" funkce)

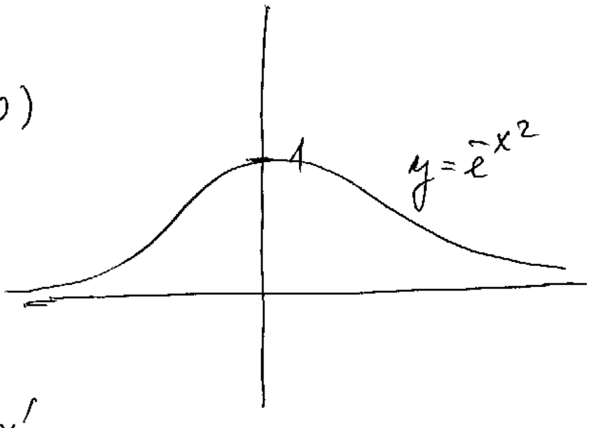
– $D_f=R$, opět „sudá", $e^{-x^2}\leq 1$ $(-x^2\leq 0)$

(a podobně jako u fce $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$)

pro $x\geq 0$: e^{-x^2} je funkce složená – e^{y} je rostoucí, $y=-x^2$ je klesající pro $x\geq 0$, tedy $f(x)=e^{-x^2}$ je klesající

a pro $x\to\infty$ je $\lim(-x^2)=-\infty$,

a z „grafu" fce exp – $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0$, $f(0)=e^{0}=1$



A bude na přednášce

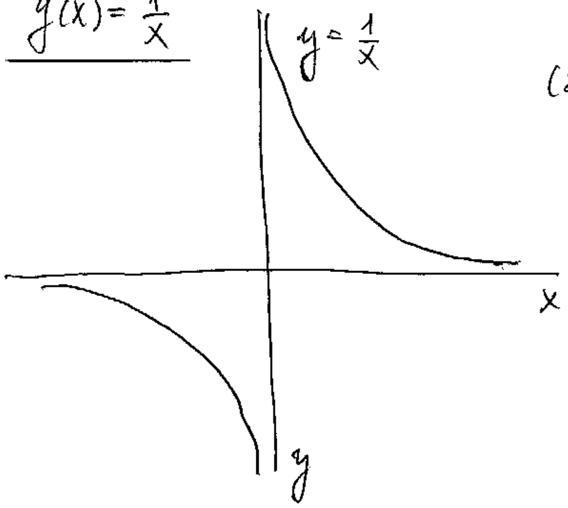
(*) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ – trochu těžší příklad grafu fce, složené z exponenciely (funkce vnější) a $g(x) = \frac{1}{x}$ (vnitřní fce),

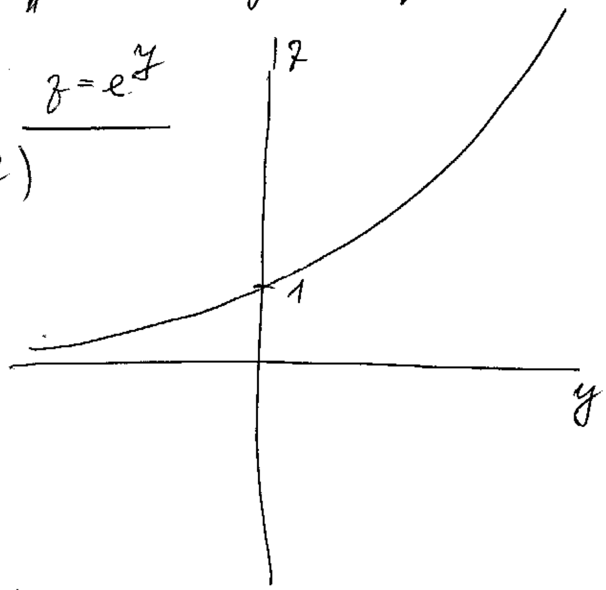
tj. $f(x) = e^{g(x)}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$f(x) > 0$

a zkusme graf odhadnout (bez použití diferenciálního počtu zatím – bude později) „skládáním" grafů fce

$g(x) = \frac{1}{x}$ + (složení) $z = e^y$





pro $x \in (0,+\infty)$ je $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1$

$x \in (-\infty,0)$ je $\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 0 < e^{\frac{1}{x}} < 1$

$g(x) = \frac{1}{x}$ je klesající v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$, e^y je rostoucí v $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ proto $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ je klesající v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$

a pro $x \to 0+$ je $\frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$

$x \to 0-$ je $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \to 0$

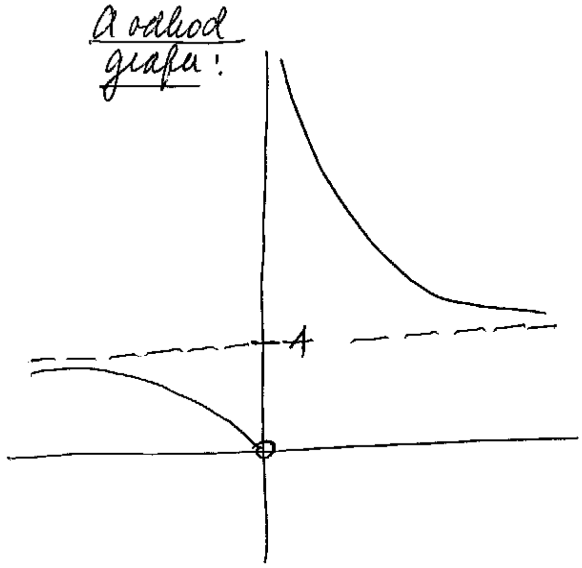
pro $x \to \pm\infty$ $\frac{1}{x} \to 0$ a

tedy $e^{\frac{1}{x}} \to 1$

(tj. „pořádně" $\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$)

$e^{\frac{1}{x}} \neq 1$ neboť $\frac{1}{x} \neq 0$

A odhad grafu:

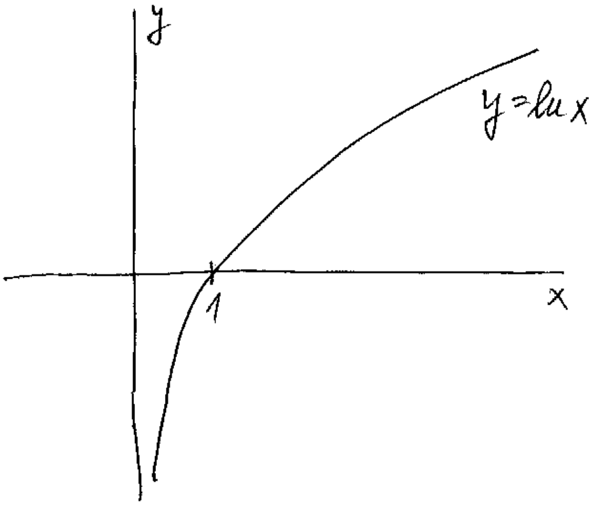


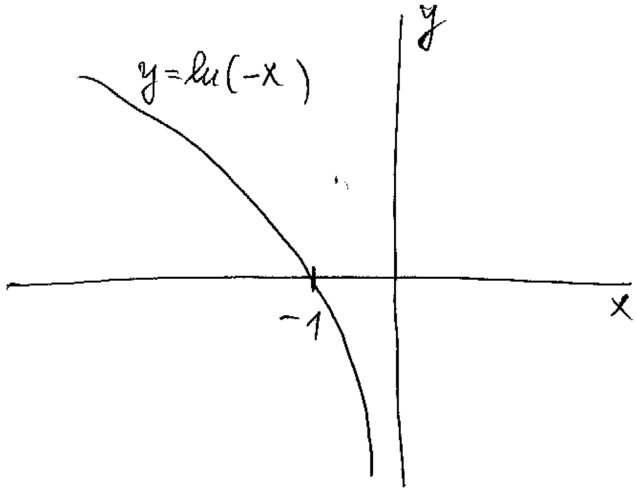
g) Agistí funkce $f(x)=\ln x$

$\mathcal{D}f = (0,+\infty)$ – základní

$\rightarrow$ $f(x)=\ln(-x)$ – $\mathcal{D}f = (-\infty, 0)$

(a analogicky jako u grafu $\sqrt{-x}$)





$f(x)=\ln|x|$ – $\mathcal{D}f = R \setminus \{0\}$

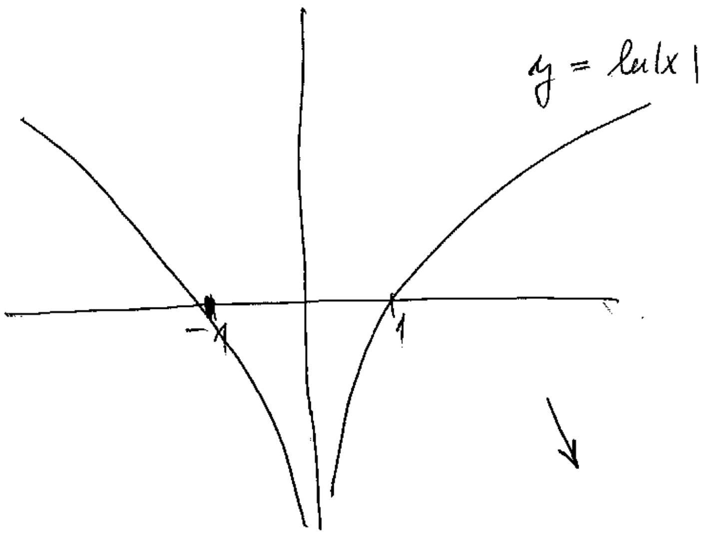
fce sudá, pro $x \in (0,+\infty)$ je $\ln|x| = \ln x$

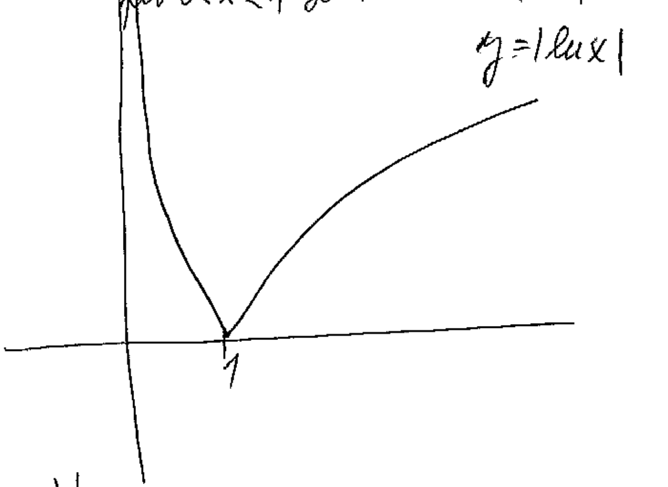
$f(x) = |\ln x|$, $\mathcal{D}f = (0,+\infty)$

pro $x \geq 1$ je $\ln x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\ln x| = \ln x$

pro $0<x<1$ je $\ln x < 0 \Rightarrow |\ln x| = -\ln x$

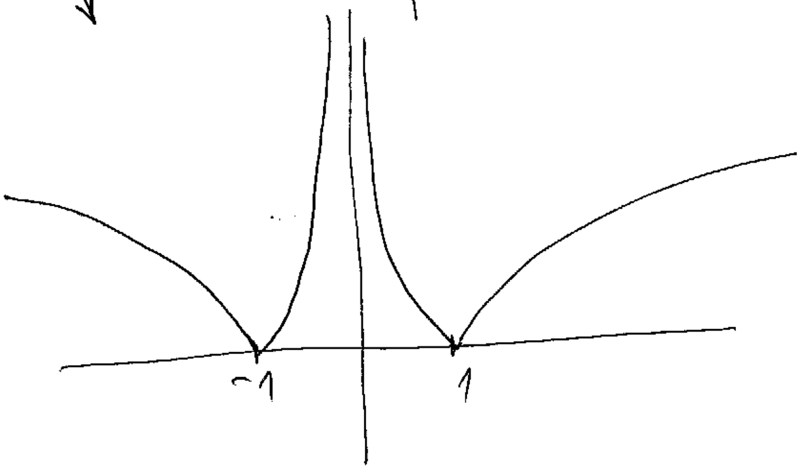




a $f(x) = |\ln|x||$

$\mathcal{D}f = R \setminus \{0\}$

(fce sudá – opět a pro $x \in (0,+\infty)$ je $f(x) = |\ln|x|| = |\ln x|$, neboť $|x| = x$ pro $x \in (0,+\infty)$)



a „některé" příklady z

h) $f(x) = \sin x$ (základní)

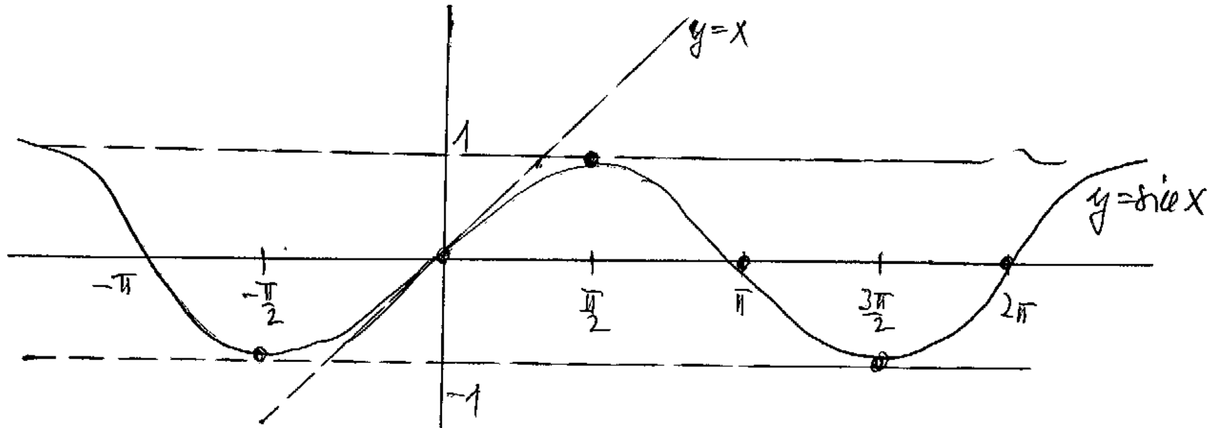
$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, funkce je 2π-periodická, lichá,

$f(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $-1 \le \sin x \le 1$,

$f(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; $f(x) = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

(nebo také $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

graf:



(že tečna grafu fce $\sin x$ v počátku je přímka $y=x$, se dozvíme v diferenciálním počtu)

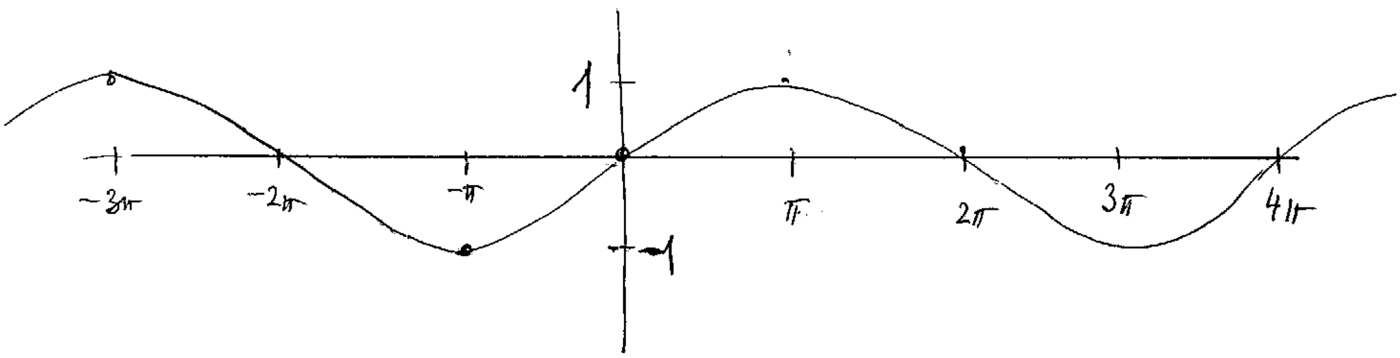
$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, opět funkce lichá, $f(x) = 0 \iff \frac{x}{2} = k\pi \iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

např. $f(x) = 1 \iff \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \pi + 4k\pi$

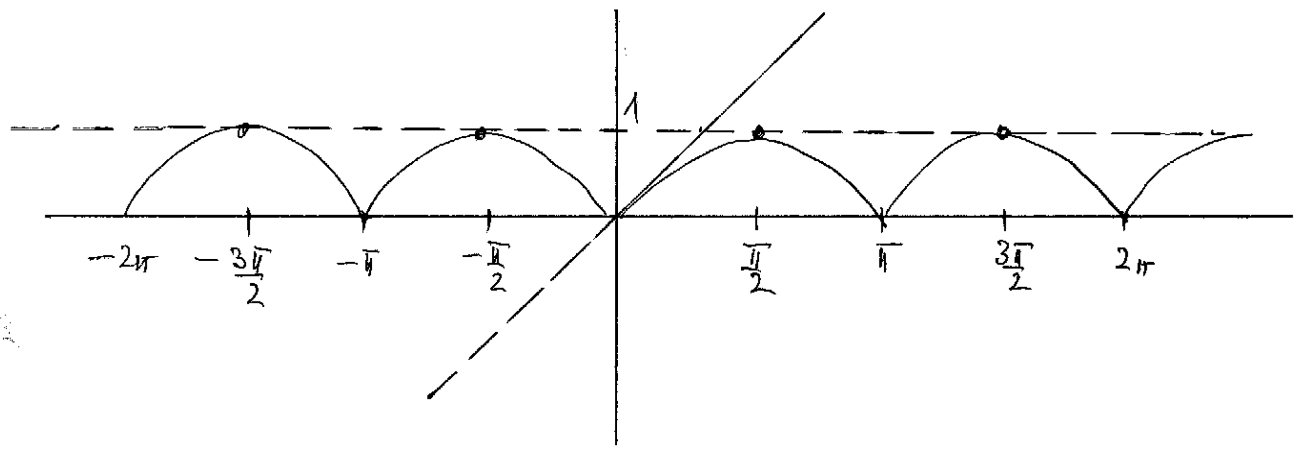
stále i $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \le 1$, tj. $-1 \le \sin\left(\frac{x}{2}\right) \le 1$ – ale perioda je $p = 4\pi$

(graf je „roztažen") – (přibližně)



$f(x) = |\sin x|$

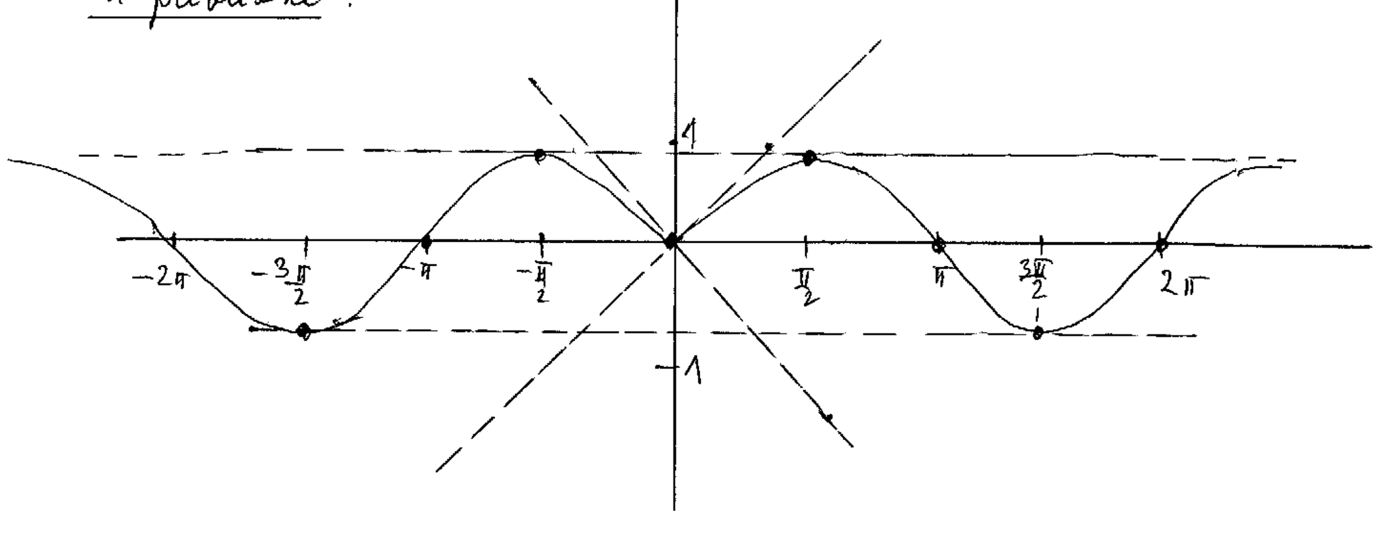
$D_f = \mathbb{R}$, $0 \leq |\sin x| \leq 1$ (funkce opět omezená), π – periodická
$f(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ – tedy f je funkce sudá
Graf (přibližně) (v intervalech $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ je $|\sin x| = \sin x$,
v intervalech $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ je $|\sin x| = -\sin x$)



a $f(x) = \sin|x|$:

$D_f = \mathbb{R}$, pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $|x| = x$, tedy $f(x) = \sin x$,
a protože $|x| = |-x|$, je $f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x)$,
je f též funkce sudá! (tedy graf je souměrný dle osy y)

a přibližně:

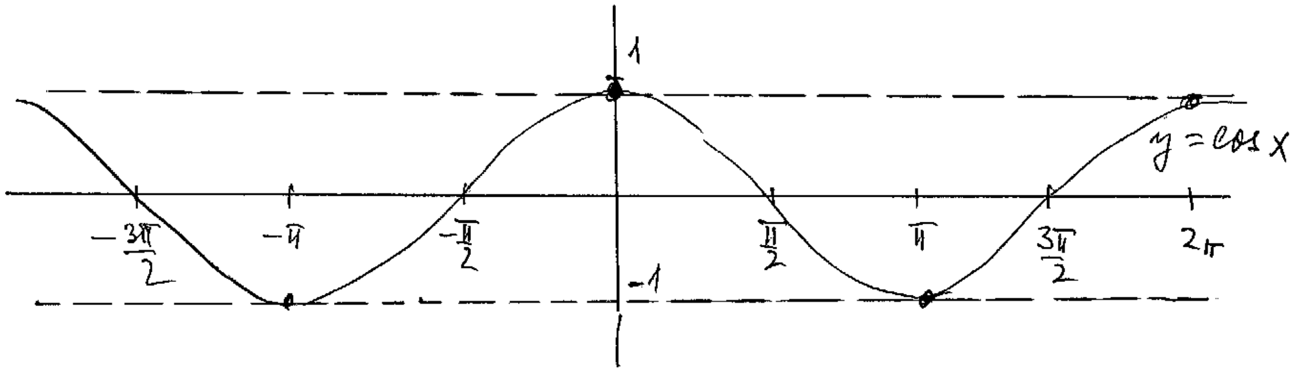


a. funkce $f(x) = \cos x$ (základní)

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 2π-periodická, sudá,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



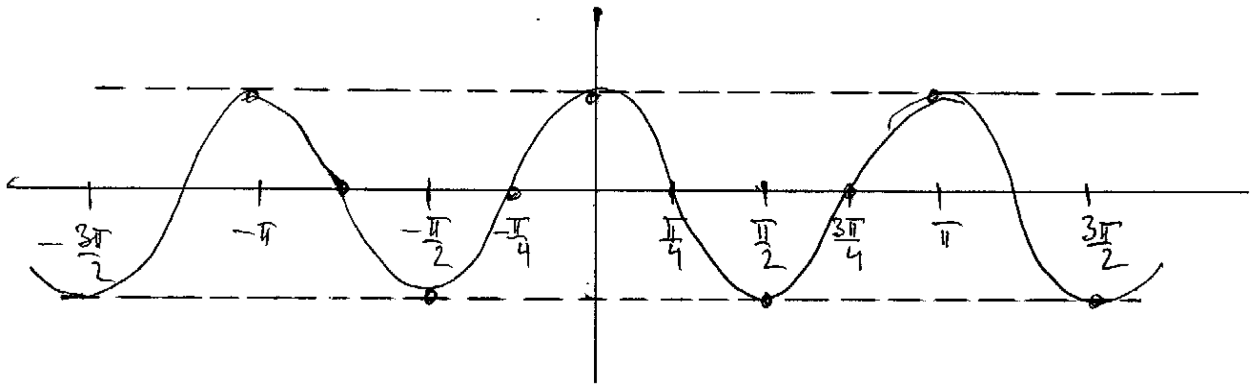
$f(x) = \cos(2x)$

opět $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, f je funkce sudá, nyní π-periodická, opět $|\cos 2x| \leq 1$,

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, tj. $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



a zkuste si (ná samí): $\sqrt{1 - (\sin x)^2} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$, $x \in \mathbb{R}$

a $f(x) = \cos|x|$: $x \geq 0$ $\cos|x| = \cos x$

$x < 0$ $\cos|x| = \cos(-x) = \cos x$

(díky sudosti fce $\cos x$)

tedy, $\cos|x| = ?$