MA1 – příklady (s vysvětlením) k přednášce 20.11.2019
(a k 23.11.2020)

1. Úvod do integrálního počtu
(na „konci" minulé přednášky 18.11.2019)

Příklady užití (a potřebnosti) „antiderivování":

1) Z 2. Newtonova pohybového zákona $m\vec{a} = \vec{F}$
(m – hmotnost, $\vec{a}$ – zrychlení, $\vec{F}$ – síla, působící „pohyb" hmotného bodu) chceme najít dráhu $s = s(t)$
(t – čas), je-li síla $\vec{F}$ konstantní. Pak lze psát
„ $ma = F$ ",

a víme, že $a(t) = v'(t) \left(= \frac{dv}{dt}(t)\right)$, a $v(t) = s'(t) \left(= \frac{ds}{dt}(t)\right)$,
tedy dostáváme rovnici
$$s''(t) = \frac{F}{m}, \quad t \in \langle 0, +\infty);$$
potom (zřejmě) $v(t) = s'(t) = \frac{F}{m}t + c$ a
(ověřte!) $s(t) = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + ct + d$, $c, d \in R$

Konstanty c, d lze určit z t.zv. počátečních podmínek:
$s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$; pak $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{F}{m}\frac{t^2}{2}$, $t \in \langle 0, +\infty)$

2) Netlumené harmonické kmity hmotného bodu hmotnosti m, pohybujícího se na přímce (můžeme ji ztotožnit s osou x, přičemž počátek zvolíme v rovnovážné poloze bodu) působí síla, přímo úměrná výchylce bodu z rovnovážné polohy, tj. $F = -kx$, $k > 0$ je konstanta.

Potom 2. Newtonův zákon má tvar

$$m\,x''(t) = -k\,x(t)\ ,\quad \text{označme } \frac{k}{m} = \alpha^2 (>0)$$

pak $\underline{x''(t) = -\alpha^2 x(t)}$

(a prozkoumáním „tabulky derivací" najdeme, spolu s „návodem pro derivaci složené funkce"), že řešení jsou: $x_1(t) = \sin(\alpha t)$, $x_2(t) = \cos(\alpha t)$, a pak také $x(t) = c_1 \sin(\alpha t) + c_2 \cos(\alpha t)$.

Zadáme-li opět počáteční výchylku a rychlost, tj. $x(0) = x_0$ a $x'(0) = v_0$, dostaneme:

$$\underline{x(t) = \frac{v_0}{\alpha} \sin\alpha t + x_0 \cos\alpha t\ ,\quad t \in \langle 0, +\infty)}$$

$$(\ x(0) = c_2 = x_0\ ,\quad x'(0) = c_1\alpha = v_0\ )$$

(a „malá" úprava dá

$$x(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2}\left(\cos\varphi \sin(\alpha t) + \sin\varphi \cdot \cos(\alpha t)\right)$$

tj. $\underline{x(t) = A \cdot \sin(\alpha t + \varphi)\ \text{(známý vzorec)}}$,

kde $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2}}\left(\frac{v_0}{\alpha}, x_0\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

a $A = \sqrt{\dfrac{v_0^2}{\alpha^2} + x_0^2}$

3. <u>Radioaktivní rozpad látky</u>

($m(t)$ – množství látky v čase t, $m_0 = m(0)$.)

je dán rovnicí

$$m'(t) = -k\,m(t), \quad k>0$$

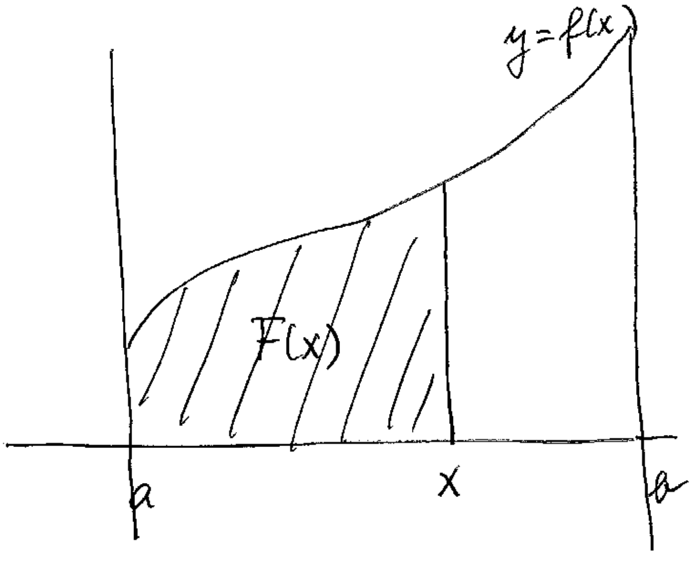
najdeme řešení? (bude dán návod při probírání „řešení diferenciálních" rovnic)

Zde asi uvedeme (opět) uhodnutí – rovnice má řešení $m(t) \equiv 0$, $t \in \langle 0, +\infty)$, ale nenulové také –
$m(t) = e^{-kt}$, ale také i řešením je

$\underline{m(t) = c\,e^{-kt},\ c \in R}$ (zkusíte ověřit –
$(c e^{-kt})' = -k c e^{-kt}$, $t \in R$,
tj. $m'(t) = -k\,m(t)$ ∇)

a $\underline{m(t) = m_0 e^{-kt},\ t \geq 0}$ je řešením, je-li $m(0) = m_0$.

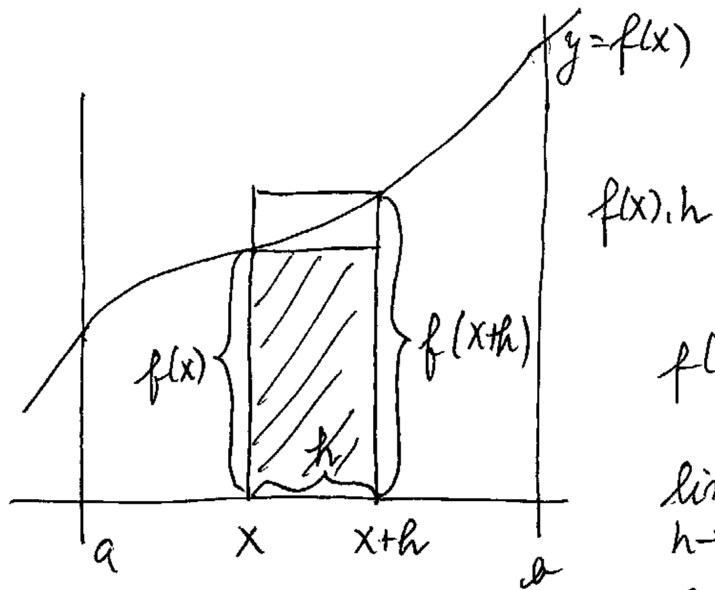
4. Mějme zadanou rostoucí, spojitou funkci $y = f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$.



Označme $F(x)$ plošný obsah oblasti, ohraničené osou x a grafem funkce f, se „základnou" $\langle a, x \rangle$, $x \in (a, b)$ a ukažme si, že platí:

$$\underline{F'(x) = f(x) \quad v\ (a,b)}\ ∇$$

Je $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ – při výpočtu limity pomocí „shazující“: (obsahy obdélníků)



$$f(x) \cdot h \leq F(x+h) - F(x) \leq f(x+h) \cdot h$$

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

(f je spojitá v bodě x),

tedy, užitím věty „o shazujících“ dostaneme, že

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

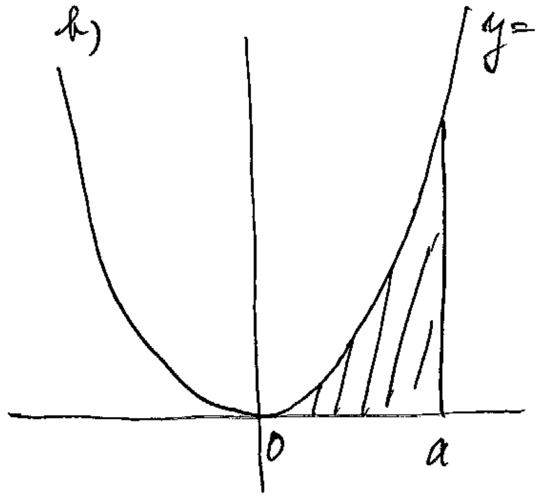
(což jsme měli ukázat).

Tedy, pomocí „antiderivace“ funkce f lze určit i plošný obsah oblasti „pod grafem“ fce (bude v teorii a aplikacích určitého integrálu)

<u>Příklad</u> a) v příkladu „nahoře“ – označíme-li $P(f; \langle \alpha, \beta \rangle)$ obsah oblasti, ohraničené osou x a grafem f, „nad“ intervalem $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a, b \rangle$, pak je zřejmě

$$P(f; \langle \alpha, \beta \rangle) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Poznámka: často se říká i „velikost plochy“ (a rozumí se – plošný obsah rovinné oblasti – plochy) b)



$f(x) = x^2$:

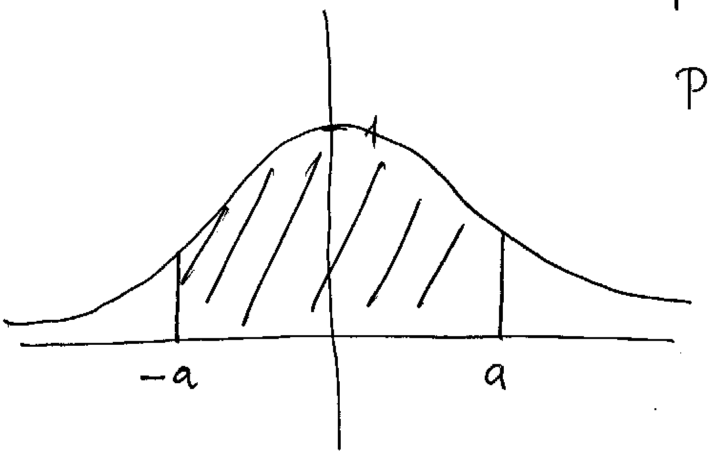
$$P(x^2; \langle 0, a \rangle) = \frac{a^3}{3} \quad (a>0)$$

(neboť $F(x)$ k fci $f(x)$ je

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ (zkouška: $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$)

(věděl už Archimedes)

nebo



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle -a, a \rangle\right) = 2P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle 0, a \rangle\right)$$

$$= 2 \cdot \operatorname{arctg}(a), \quad a>0$$

$\left(F(x) = \operatorname{arctg} x;\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \right)$

např. $a=1$ $\quad P\left(\frac{1}{1+x^2}; \langle 0, 1 \rangle\right) = \frac{\pi}{4}$

2. Primitivní funkce k funkci f (neurčitý integrál)

Definice: Nechť funkce f je definovaná na intervalu (a,b), pak funkce F, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b)$$

se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b).

Příklady – „opačně" čtená tabulka derivací:

$f(x)$	$F(x)$	$x \in (a,b)$
0	c	$x \in R$
1	x	$x \in R$
x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$, $x > 0$ (obecně) (pro $n \in N$: $x \in R$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$x \in (0, +\infty)$
e^x	e^x	$x \in R$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in R$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in R$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in Z$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$x \in R$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$

Poznámka

pro funkci $f(x)=0$ – máme nekonečně mnoho primitivních funkcí: $F(x)=c$, $c\in R$

Jak je to pro „ostatní" funkce?

<u>V1:</u> Je-li $F'(x)=f(x)$ v (a,b), pak také $(F(x)+c)'=f(x)$ v (a,b), $c\in R$.

Tedy, máme také už nekonečně mnoho primitivních funkcí k funkci f. A máme dokonce všechny, neboť platí:

<u>V2.</u> Je-li $F'(x)=G'(x)=f(x)$ v (a,b), pak existuje konstanta $c\in R$ tak, že $G(x)=F(x)+c$, $x\in(a,b)$.

A časté označení (buď množiny všech primitivních funkcí k funkci f v (a,b) nebo libovolné fce z množiny funkcí primitivních – výklady jsou „různé")

$$\int \underline{f(x)dx = F(x)+c, \quad x\in(a,b),\ c\in R}$$

a název – <u>neurčitý integrál funkce f v (a,b)</u>

(nebo na (a,b))

Další důležitá tvrzení o primitivních funkcích :

<u>V3:</u> Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na (a,b), pak je $F(x)$ spojitá funkce v (a,b).

(Dk : $F'(x) = f(x) \in R \Rightarrow F$ je spojitá v (a,b))

<u>V4:</u> <u>Existence primitivní funkce</u> (bez důkazu)

(základní věta matematické analýzy)

Je-li funkce f spojitá v (a,b), pak k funkci f v (a,b) existuje funkce primitivní.

<u>Další příklady:</u>

<u>1.</u> $\frac{1}{x} = f(x)$ je spojitá i na intervalu $(-\infty, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ i zde má primitivní funkci –

– pokus: $\underset{(-x \in (0,+\infty))}{(\ln(-x))'} = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$!

Tedy, tabulku je třeba upravit (důležité!)

! $\underline{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,}$ $x \in (0,+\infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$

2. $f(x) = |x|$ – spojitá funkce v $\mathbb{R}$, tedy má primitivní funkci, ale „není v tabulce", ale dostaneme se „tam" v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$

$f(x) = x \implies F(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in (0, +\infty), \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = -x \implies F(x) = -\frac{x^2}{2} + d, \quad x \in (-\infty, 0), \quad d \in \mathbb{R}$

a $F(0)$? – $F(x)$ „musí" být v bodě $x = 0$ spojitá, tedy

$\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x)$, tj. $c = d$,

pak dodefinujeme „spojitě" $F(0) = c$

tj. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c, & x \in (0, +\infty) \\ c & x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

(tzv. „slepovaná" primitivní funkce)

3. A jak u nespojité funkce?

Př: $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} F(x) = x + c \\ F(x) = c \\ F(x) = -x + c \end{matrix}$

(opět spojitě „slepené") –

– ale $F(x)$ nemá derivaci v bodě $x = 0$! tj. $\operatorname{sgn} x$ nemá v $\mathbb{R}$ primitivní funkci $(F'_-(0) = -1, \ F'_+(0) = 1)$

4. Ale jsou i nespojité funkce, které mají funkci primitivní !

$f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$ není funkce spojitá v bodě $x=0$ (nemá pro $x \to 0$ limitu), ale pro funkci, definovanou

$F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $F(0) = 0$ platí :

$F'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $F'(0) = 0$, tj.

$F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ v R !

5. Jak „spočítat" primitivní funkce k funkcím (například)

$f(x) = 4\cos x$? $F(x) = 4\sin x + c$, $x \in R$

$f(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$? $F(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

a třeba k $f(x) = e^{3x}$, nebo $f(x) = \sin(2-x)$, nebo k $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ (apod.)

? $\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$, $\int \sin(2-x)\,dx = -\cos(2-x)(-1) + c$,

$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+3) + c$, pokud $2x+3 > 0$

∇ a lépe $\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$ (pro $x \neq -\frac{3}{2}$)

1) <u>Obecně</u> (užitečný „návod", který usnadňuje počítání neurčitých integrálů):

jestliže $F'(x) = f(x)$ v intervalu (α,β),

pak $\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \frac{F'(ax+b)}{a}\cdot a = f(ax+b)$!

$(a\neq 0,\ ax+b\in(\alpha,\beta))$

tedy, máme návod:

! $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c,$$

pokud $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ (v odpovídajících intervalech)

<u>a další příklady:</u>

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x}+c,\quad x\in\mathbb{R}\qquad (a=-1,\ b=0)$$

$$\int \frac{1}{2-x}dx = -\ln|2-x|+c\quad,\ x\neq 0\qquad (a=-1,\ b=2)$$

$$\int \frac{1}{4x^2+1}dx = \int\frac{1}{(2x)^2+1}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+c,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\ \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+c,$$

$x\in\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int\frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x+2)+c$$

2) Z dalších pravidel (aŕijme „obecné" vzorce pro počítání derivací)

Pravidla výpočtu primitivních funkcí (neurčitých integrálů)

Nechť $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = g(x)$ v (a,b), pak platí:

1) $\int f'(x)dx = f(x) + c$, $x \in (a,b)$;

2) $F(x) + G(x)$ je primitivní fce k fci $f(x) + g(x)$ v (a,b),

tj. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

3) $cF(x)$ je primitivní fce k $cf(x)$ v (a,b),

tj. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

Příklady:

$$\int 4\sqrt{x}dx = 4\int \sqrt{x}dx = 4\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{x^3} + c, \quad x \in \langle 0, +\infty)$$

$$\int \frac{1+x^2}{x}dx = \int\left(\frac{1}{x} + x\right)dx = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in (0,+\infty) \vee x \in (-\infty, 0)$$

a 4) Využití vzorce pro derivaci součinu?

známe: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + fg'$ v (a,b), jsou-li f', g' spojité v (a,b), pak

existuje v (a,b) $\int (f(x)g(x))'dx = f(x).g(x) + c$, a zároveň také

$$\int (f(x)g(x))' = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

a odtud máme důležitý návod – integrace per partes:

$$\underline{\int f'(x)g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x)g'(x)dx}\ , \quad x \in (a,b)$$

Jak tomuto máme rozumět? – Integraci per partes (po částech) užijeme při integraci součinu dvou funkcí, z nichž aspoň jednu „umíme" integrovat – ve vzorci je to funkce f', druhou pak derivujeme a místo původního integrálu $\int f'(x)g(x)dx$ „dostaneme" jiný – $\int f(x)g'(x)dx$ – pokud je „lehčí", tak nám to „pomůže"!

<u>Příklad</u>: 1) $x.\ln x$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$, tedy existuje

$$\int x.\ln x dx \overset{*}{=} \text{(integrace per partes)}$$

$\ln x$ neumíme integrovat (zatím), tak zvolíme $f'(x) = x$, pak $f(x) = \frac{x^2}{2}$, a $g(x) = \ln x$, a $g'(x) = \frac{1}{x}$, tedy

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \underline{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C, \quad x \in (0,+\infty)}$$

<u>Budeme zapisovat (chcete-li)</u>

$$\underline{\int x.\ln x dx =} \left| \begin{matrix} f' = x\ , & f = \frac{x^2}{2} \\ g = \ln x\ , & g' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \cdots$$

(atd)

2) $\displaystyle\int x e^x\,dx \underset{(1)}{=} \left| \begin{matrix} f' = x, & f = \frac{x^2}{2} \\ g = e^x, & g' = e^x \end{matrix} \right| \underset{PP}{=} \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\,dx -$

máme dvě různé volby – (1) jako v prvním příkladu

– asi není „dobrá" volba, integrál $\int \frac{x^2}{2} e^x\,dx$ je asi „horší" než ten, co máme určit – tedy obrátíme:

$$\underline{\int x e^x\,dx} = \left| \begin{matrix} f' = e^x, & f = e^x \\ g = x, & g' = 1 \end{matrix} \right| \underset{PP}{=} x e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx$$

$$= \underline{x e^x - e^x + C, \quad x \in R} \qquad \nabla !$$

3) $\displaystyle\underline{\int \ln x\,dx}_{\,x \in (0,+\infty)} = \int 1 \cdot \ln x\,dx \underset{PP}{=} \left| \begin{matrix} f' = 1 & f = x \\ g = \ln x, & g' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right|$

(lze integrovat i funkci „samotnou")

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = \underline{x \ln x - x + C}$$

4) $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$, $x \in R$ – asi také příklad na integraci per partes, ale derivací ani integrací se nepodaří integrál „zjednodušit" jako v předchozích příkladech –

– dostaneme ale integrací per partes „rovnici" pro hledaný integrál

$$I = \int\limits_{x\in\mathbb{R}} e^x \cos x\,dx \underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} f' = e^x & f = e^x \\ g = \cos x, & g' = -\sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int (-\sin x)\cdot e^x\,dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx \underset{pp}{=}$$

$$= \left| \begin{matrix} f' = e^x & f = e^x \\ g = \sin x, & g' = \cos x \end{matrix} \right| = e^x \cdot \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx,$$

tedy máme: $\quad I = e^x(\cos x + \sin x) - I$, a odtud

$$2I = e^x(\cos x + \sin x) \text{ a}$$

$$\underline{I = \frac{e^x}{2}\cdot(\cos x + \sin x) + c,\ x\in\mathbb{R}}$$

Poznámka: Pozor! Musíme zachovat v druhém „použití" per partes volbu f' a g jako v prvním užití per partes!

Kdybychom volbu změnili:

$$\int e^x \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} f' = e^x, & f = e^x \\ g = \cos x, & g' = -\sin x \end{matrix} \right| = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx =$$

$$\underset{\text{a nyní „opačně"}}{=} \left| \begin{matrix} f' = \sin x, & f = -\cos x \\ g = e^x, & g' = e^x \end{matrix} \right| = e^x\cos x - e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx =$$

$$= \int e^x \cos x\,dx$$ (sice „pravda", ale integrál neznáme!)