

1. Bud'te dány vektory $\vec{u} = (3, 2, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Spočítejte $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

2. a) Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^4$:

$$\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 3), \quad \vec{u}_2 = (0, 2, 1, 0), \quad \vec{u}_3 = (0, 0, -1, 1).$$

Uka'zte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.

b) Existuje reálné číslo a , pro které jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in \mathbb{R}^4$ lineárně závislé, je-li :

$$\vec{u}_1 = (0, 0, -1, a^2), \quad \vec{u}_2 = (1, 2a, -a, 1), \quad \vec{u}_3 = (0, 0, 0, 3), \quad \vec{u}_4 = (0, 2, a^3, 1) ?$$

3. Užitím Gaussovy eliminační metody najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{cases} 2x - y + z + v = -3 \\ x + y + 3z - v = 0 \\ -x + 2y - z + v = 6 \\ x + y + 2z - 3v = -2 \end{cases},$$

nebo uka'zte, že soustava řešení nemá.

4. a) Určete hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

c) Soustavu (*) vyřešte.

5. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte všechny vektory $v \in \mathbb{R}^5$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .

6. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

7. Jsou dány matice $M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte $\det M$, $\det N$, $\det(M \cdot N)$ a ukažte si, že platí $\det M \cdot \det N = \det(M \cdot N)$.

8. Je dána matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Ukažte, že k matici B existuje matice inverzní a určete ji (Gauss-Jordanovou metodou i užitím determinantů). Ověřte správnost výpočtu matice B^{-1} .

b) Užitím B^{-1} řešte rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

9. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji.

b) Užitím inverzní matice řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

10. Pomocí determinantu najděte rovnici roviny, ve které leží body $A[1,-1,2]$, $B[2,1,0]$ $C[-1,1,1]$.