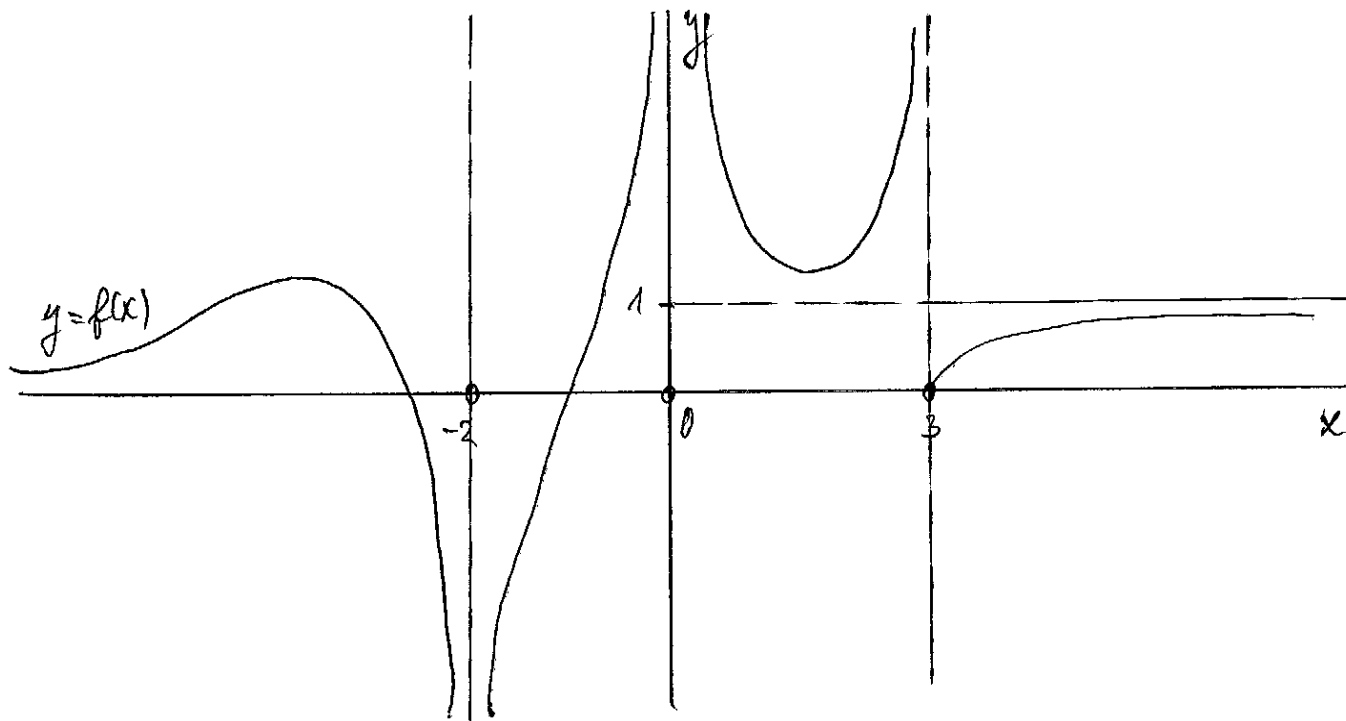


MA1 cvičení 21.10.

Limita funkce – úvodní příklady

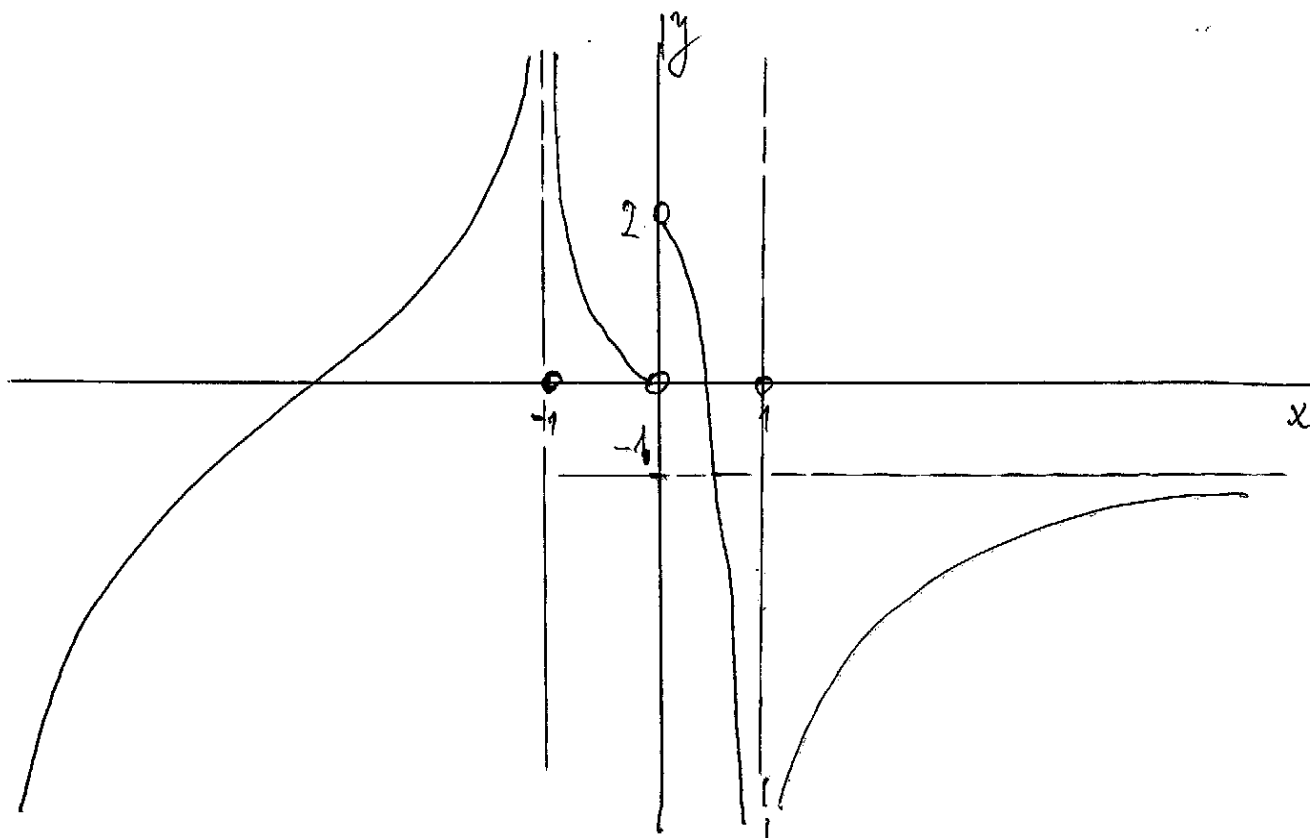
1. Popište limity funkce, jejíž graf je „na obrázku“, v bodech, kde funkce není definována, a též v  $+\infty$  a v  $-\infty$  (tj. limity v krajních bodech všech intervalů jejího definičního oboru).



2. Zkuste načrtnout graf funkce  $y = f(x)$ , víte-li, že

$Df = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ ,  $f$  je spojitá ve všech bodech z definičního oboru  $Df$  a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$



3. Pomocí intuitivní znalosti limit základních funkcí „odhadněte“ limity daných funkcí v krajních bodech intervalů jejich definičních oborů: (zde  $\exp(x) = e^x$ ):

$$f(x) = : x^2 - 4x + 3 ; \frac{1}{x^4} ; e^{-x} ; e^{-|x|} ; \exp(\sqrt{x^2 + 1}) ; \ln(x + 1) .$$

A třeba i zkuste odhadnout, kde jsou tyto funkce rostoucí, nebo klesající, a také jejich grafy.

4. A výběr jednodušších příkladů na výpočet limity funkce:

i) aritmetika limit:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+3)^2} ; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{(x-1)^3} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3 - x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3 - x^2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) ;$$

ii) limita složené funkce:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right) ; \lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; \lim_{x \rightarrow ?} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} ;$$

Víme-li, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} ;$$

Víme-li, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} ; \lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) ;$$

iii) Užitím věty o limitě sevřené funkce vypočítejte limity:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x) .$$