

**MA 1 cvičení - výpočet derivace funkce a užití derivace (1).**
**Výpočet derivace funkce**

1. Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$$f(x) = : \frac{1}{x} + 4x^2; \quad \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}; \quad x + \sin x; \quad x^2 \sin x; \quad x \cdot \ln(x-3); \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad \frac{x^3}{x^2-1}; \quad \frac{2}{(x^3-2)^2};$$

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}; \quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; \quad \sqrt{1+\sin 4x}; \quad \cos \sqrt{x}; \quad x^2 \cdot e^{-x}; \quad e^{\frac{1}{x}} - x; \quad \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); \quad \frac{e^{-x}}{2-x};$$

$$x^2 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right); \quad e^{-3x^2} \cdot \cos(\ln 2x); \quad \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$x - 2 \operatorname{arctg} x; \quad \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}; \quad x^3 \ln(\operatorname{arctg} 2x); \quad \sqrt{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg}(\sin(2x)); \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right);$$

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \text{ (trošku těžší příklad).}$$

Výpočet derivace funkce – další příklady .

2. Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$$f(x) = : x^2 \cdot \ln(x-1); \quad \frac{1}{(x^2+1)^3}; \quad \sin^2(3x); \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad x^2 \cdot \sqrt{\sin x}; \quad (\sin^2 x + x)^2; \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x^2};$$

$$x \cdot e^{\sqrt{x}} + e^{\frac{1}{x}}; \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad x \cdot \arcsin \sqrt{x}; \quad \sqrt{1-e^x}; \quad \exp\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right);$$

$$\ln(x^2 - 4x); \quad \ln(\sin \sqrt{x}); \quad \ln(\ln(\ln x)); \quad \sqrt{\ln(x+1)}; \quad \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right); \quad \cos \sqrt{x+1}; \quad \sin \sqrt{2-x};$$

$$|x|; \quad |\sin x|; \quad x^x; \quad x^{\frac{1}{x}}; \quad (x^2+1)^{\sin x}.$$

3. Najděte  $f''(x)$  (všude, kde existuje), je-li  $f(x)$ :

$$f(x) = : \frac{1-x}{1+x}; \quad \frac{x^2}{x^2-1}; \quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2; \quad x \cdot \sqrt{1+x^2}; \quad x^2 e^{-x}; \quad x^3 \cos x; \quad \frac{e^{-x}}{2-x}; \quad \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad * \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

**(\*) Spojitost funkce, výpočet derivací a dopočítávání derivací ve „špatných“ bodech:**

1. Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce

(i)  $f(x) = |x|$  a  $g(x) = |x^3|$  v bodě  $x = 0$

(ii)  $f(x) = |\ln x|$  a  $g(x) = |\ln^3 x|$  v bodě  $x = 1$ .

(iii)  $f(x) = |\arctg x|$  a  $g(x) = |\arctg^3 x|$  v bodě  $x = 0$

Dokážete výsledek zobecnit ?

2. Je dána funkce  $f$  předpisem :  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  .

Ukažte, že funkce  $f$  je v bodě  $x_0 = 0$  spojitá. Spočítejte  $f'(x)$  pro všechna  $x \in R$ .

Ukažte, že také derivace funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 = 0$

3. Je dána funkce  $f$  předpisem :

(i)  $f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  .

Ukažte, že funkce  $f$  je v bodě  $x_0 = 0$  spojitá. Spočítejte  $f'(x)$  pro všechna  $x \in R$ .

Ukažte, že také derivace funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 = 0$  .

(ii)  $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pro  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Ukažte, že funkce  $f$  je v bodě  $x_0 = 0$  spojitá .

Spočítejte  $f'(x)$  pro všechna  $x \in R$  a vyšetřete i zde spjitost derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0 = 0$ .

4. „Dopočítávání“ derivací - další příklady:

Spočítejte derivaci funkce  $f$  ve všech bodech z definičního oboru funkce (případně jednostranné derivace v krajních bodech intervalů z definičního oboru), je-li :

$$f(x) = : \sqrt{x-1} ; \cos\sqrt{x-1} ; \sin\sqrt{2+x} ; \sqrt{\sin x} ; e^{\sqrt{x+1}} ; \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} ; * \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) ; \sqrt{|x|} .$$

**Aplikace derivace v bodě:**

1. Ukažte, že pro „malá“  $x$  je

a)  $\sin x \cong x$  ;  $\operatorname{tg} x \cong x$  ;  $\arcsin x \cong x$  ;  $\arctg x \cong x$  ;

b)  $\sqrt{x+1} \cong 1 + \frac{1}{2}x$  ;  $\sqrt[n]{1+x} \cong 1 + \frac{1}{n}x$ ,  $n \in N$  ;

c)  $\ln(x+1) \cong x$  ;  $e^x \cong 1+x$  ;

d)  $\arctg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cong -\frac{\pi}{4} - x$  ;  $\ln(1 + \sin(4x)) \cong 4x$  .

2. Vypočítejte přibližně užitím lineární aproximace (a porovnejte s hodnotami, které „dává“ kalkulačka):

$$\sqrt[3]{e} ; \arcsin(0,2) ; (1,04)^3 ; \sqrt{1,06} ; \sqrt[10]{1,3} ; \ln(1,02) .$$

3. Vypočítejte přírůstek objemu a povrchu koule, změníme-li její poloměr  $R$  na  $R + \Delta R$  a porovnejte je s lineární aproximací přírůstků pomocí diferenciálu.