

3. domácí „test“ z Matematické analýzy I – diferenciální počet.

1. a) Vypočítejte limitu ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}.$$

b) Vypočítejte limitu ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 - \operatorname{arctg} \frac{3}{n} \right).$$

2. a) Napište definici spojitosti funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$.

b) Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

$$(i) \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2},$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^3}.$$

3. a) i) Napište co znamená (dle definice), že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

ii) Definujte derivaci $f'(x_0)$ funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) Je dána funkce f předpisem: $f(x) = x^3 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$

Ukažte, že funkce f je v bodě $x_0 = 0$ spojitá.

c) Spočítejte $f'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že také první derivace funkce f je spojitá v bodě $x_0 = 0$.

(Návod pro b) a c): pro výpočet limity použijte větu limitě sevřené funkce.)

4. Funkce f je definována:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad \text{pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \quad \text{pro } |x| \geq 1.$$

Ukažte, že funkce f i její derivace f' jsou funkce spojitě v \mathbb{R} .

5. Funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \operatorname{arctg}^2 \left(\sqrt{\frac{x}{1-x^2}} \right).$$

Najděte její definiční obor D_f . Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

6. Je dána funkce

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 .$$

Vyšetřete její průběh:

Najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f a limity v krajních bodech .

Vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii , lokální a globální extrémy funkce f .

Vypočítejte druhou derivaci. Najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

Pokud má funkce f inflexní body , určete je.

Načrtněte graf funkce.

7. Je dána funkce

$$f(x) = x e^{-|x-1|} .$$

Vyšetřete její průběh (viz př.6) .

8.

Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2} .$$

Načrtněte graf funkce f .

9.

Nalezněte lokální a globální extrémy funkce

$$f(x) = \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

Načrtněte graf funkce f .

10. Je dána funkce

$$f(x) = \ln(|x| - x^2) .$$

a) Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f .

b) Načrtněte graf funkce f .

11. Je dána funkce

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} .$$

a) Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f .

b) Načrtněte graf funkce f .

12. Vypočítejte limity:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \arcsin \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x)^{\frac{1}{2x}} .$$